

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОСИСТЕМ

ЛЕКЦИЯ 5

ТИПОЛОГИЯ и КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ



ЧАСТЬ 2

Математические модели:

1). Определение и принципиальная форма выражения математической модели;

2). Типы математических моделей

Математической моделью системы-оригинала

$$Y^0 = (V^0, X^0, \Sigma^0, F^0)$$

называется модель

$$Y = (V, X, \Sigma, F),$$

у которой в качестве элементов множеств V и X выступают математические переменные. Обычно это скалярные функции времени (t) на рассматриваемом интервале:

$$t_0 \leq t \leq t_n :$$

$$v_1(t), \dots, v_k(t), x_1(t), \dots, x_n(t).$$

Структура таких моделей $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ представляет собой множество математических соотношений между этими переменными, которые обычно формулируются в виде уравнений и неравенств вида

$$\sigma_1 (v_1, \dots, v_k, x_1, \dots, x_n) = 0$$

.....

$$\sigma_m (v_1, \dots, v_k, x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\sigma_{m+1} (v_1, \dots, v_k, x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

.....

$$\sigma_r (v_1, \dots, v_k, x_1, \dots, x_n) \leq 0,$$

связывающих между собой внешние и внутренние переменные модели.

Функция $F = (F_1, \dots, F_n)$ есть не что иное, как разрешающий оператор совокупности математических соотношений, позволяющих по заданным входам

$$v_1(t), \dots, v_k(t); t_0 \leq t \leq t_n$$

с той или иной определенностью (от абсолютной детерминированности до размытого вероятностного описания) находить функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ на интервале $t_0 \leq t \leq t_n$:

$$x_1(t) = F_1(v_1, \dots, v_k, x_1^0, \dots, x_n^0, t)$$

.....

$$x_n(t) = F_n(v_1, \dots, v_k, x_1^0, \dots, x_n^0, t),$$

которые удовлетворяют приведенным выше уравнениям и неравенствам и заданным начальным условиям

$$x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0.$$

Например:

**Система из одной
популяции,
существующая в
условиях изобилия
корма и отсутствия
врагов**

Предположим:

- прирост популяции пропорционален достигнутой численности,
- удельная скорость прироста $\underline{r}$ зависит от $\underline{t}$ (внешний фактор), которая на рассматриваемом промежутке времени известна

Построение математической модели: Исходные данные:

- ▣ входная функции $v(t)$, задающая динамику температуры окружающей среды при $t_0 \leq t \leq t_n$,
- ▣ множество X , состоящее из одного элемента – действительной переменной $x(t)$, обозначающей численность популяции в момент времени t .

Построение математической модели: Структура модели Σ

три математических соотношения:

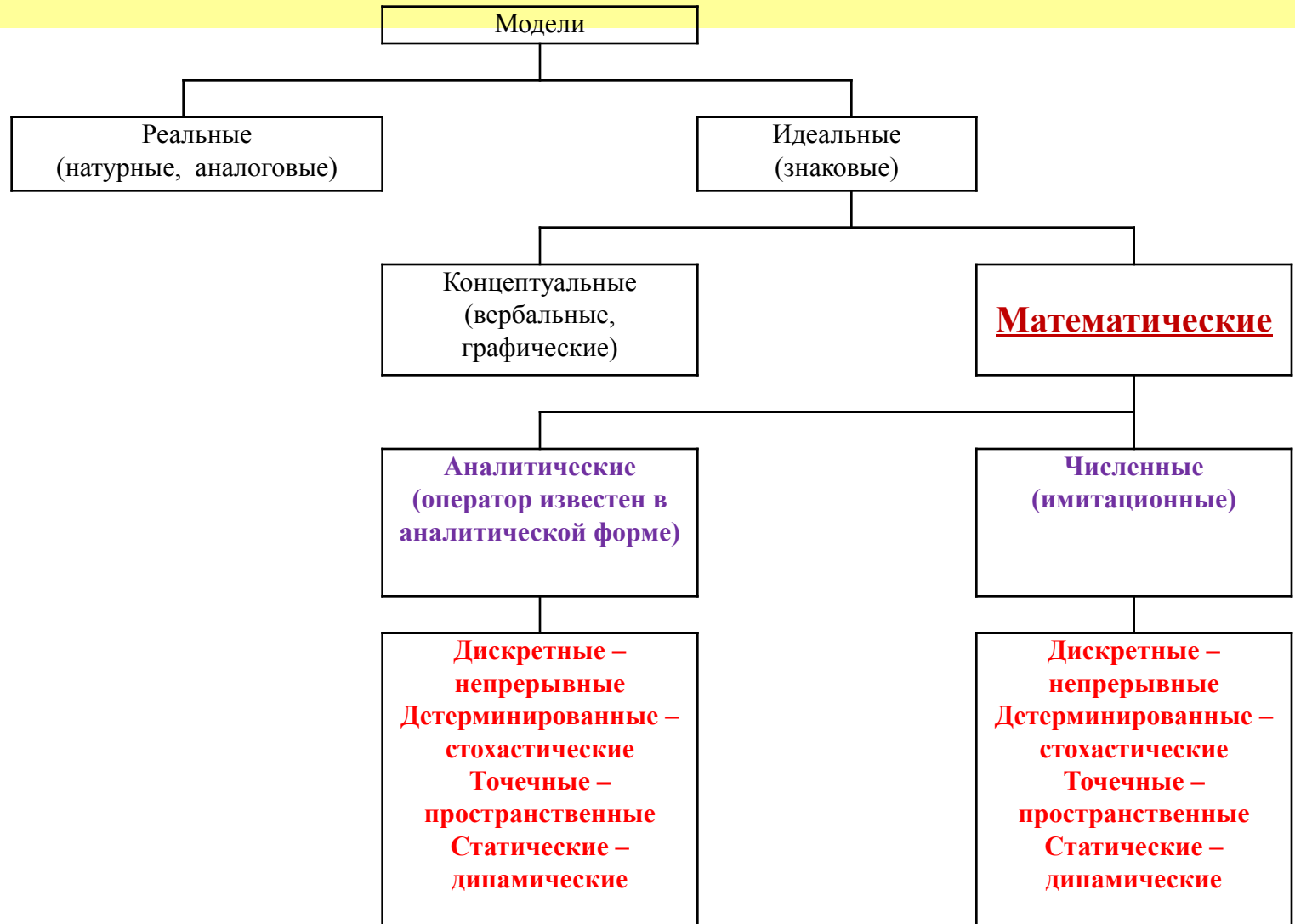
$$dx/dt = r(t) \cdot x$$

$$r(t) = \Theta(v(t))$$

$$x(t_0) = x_0.$$

- 1) выражает линейную зависимость скорости роста популяции от ее численности с меняющимся во времени коэффициентом удельного прироста $r(t)$.
- 2) служит математическим выражением зависимости r от температуры окружающей среды v : функция $\Theta(v)$ (температура ОС) известна.
- 3) задает начальную численность популяции при $t = t_0$.

Типы математических моделей:



Аналитические модели:

В зависимости от свойств разрешающего оператора F

Если для оператора F найдено **точное аналитическое выражение**, позволяющее для любых входных функций и начальных условий непосредственно определять значение переменных состояний $x_1, \dots, x_n$ в любой нужный момент t , то модель называют **аналитической**.

Аналитические модели:

- обладают многими благоприятными свойствами, облегчающими их исследование и применение;
- но в подавляющем большинстве случаев нахождение аналитического выражения для разрешающего оператора **F** оказывается затруднительным или в принципе невозможным.

Численные модели:

- Если совокупность уравнений и неравенств, отображающих структуру модели, непротиворечива и полна, то нередко удастся найти алгоритм (процедуру) численного решения этих уравнений с использованием электронно-вычислительной техники.
- В результате реализация оператора F происходит в виде машинной программы, с помощью которой по входным и начальным данным рассчитываются значения переменных состояний $x(t), \dots, x_n(t)$ на интервале $t_0 \leq t \leq t_n$.

Численные или имитационные модели.

Детерминированные и стохастические (вероятностные) модели:

Критерии определения

В зависимости от степени определенности предсказания траектории $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ оператором **F** или от того, с какой степенью вероятности математические модели прогнозируют изучаемые процессы

Детерминированные и стохастические (вероятностные) модели:

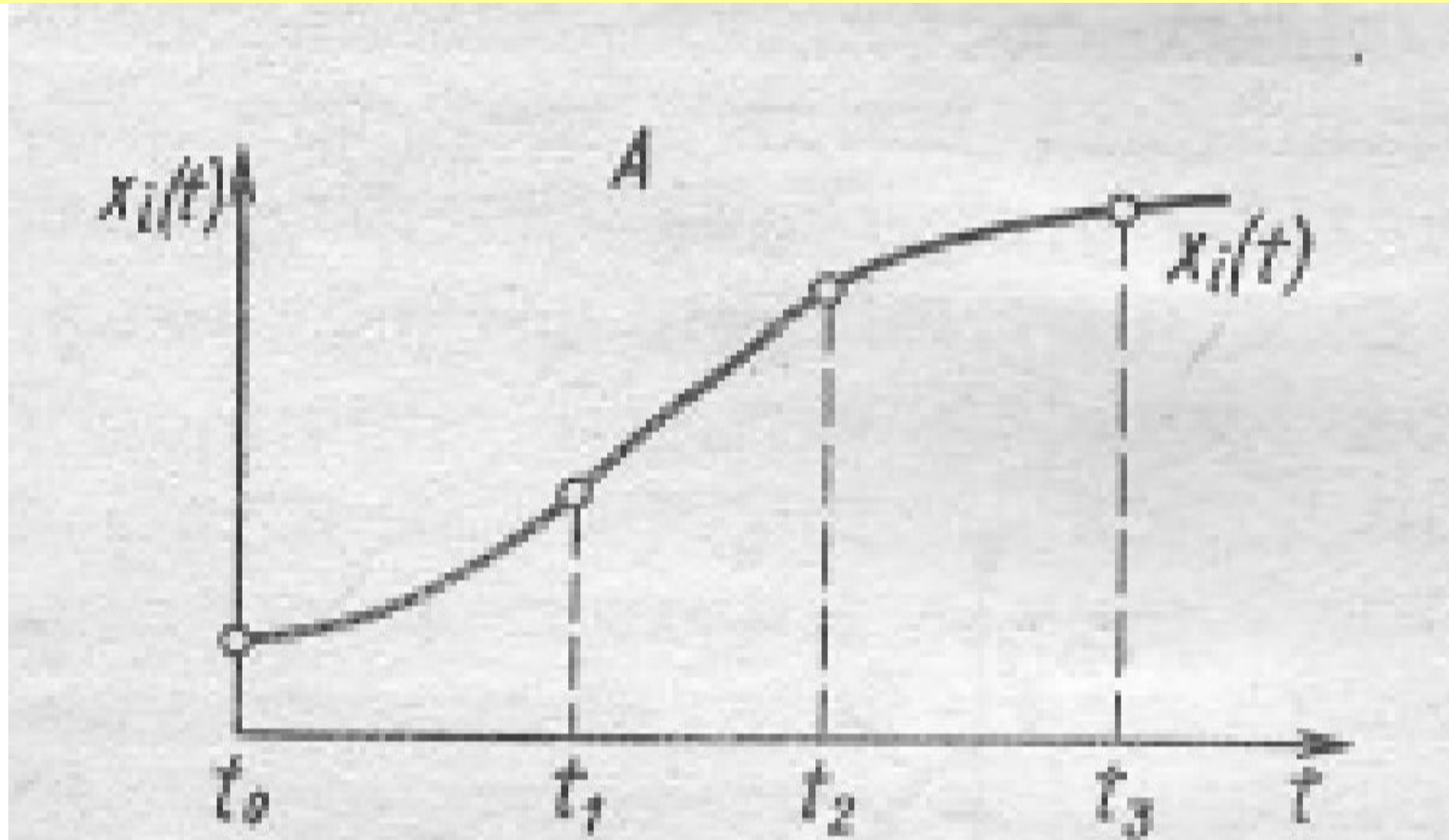
Принципиальные различия:

В детерминированной модели значения переменных состояния определяются однозначно (с точностью до ошибок вычисления).

Стохастическая модель для каждой переменной x_n дает распределение возможных значений, характеризуемое такими вероятностными показателями, как математическое ожидание $M\{x_i\}$, среднее квадратическое отклонение $\sigma\{x\}$ и т.п.

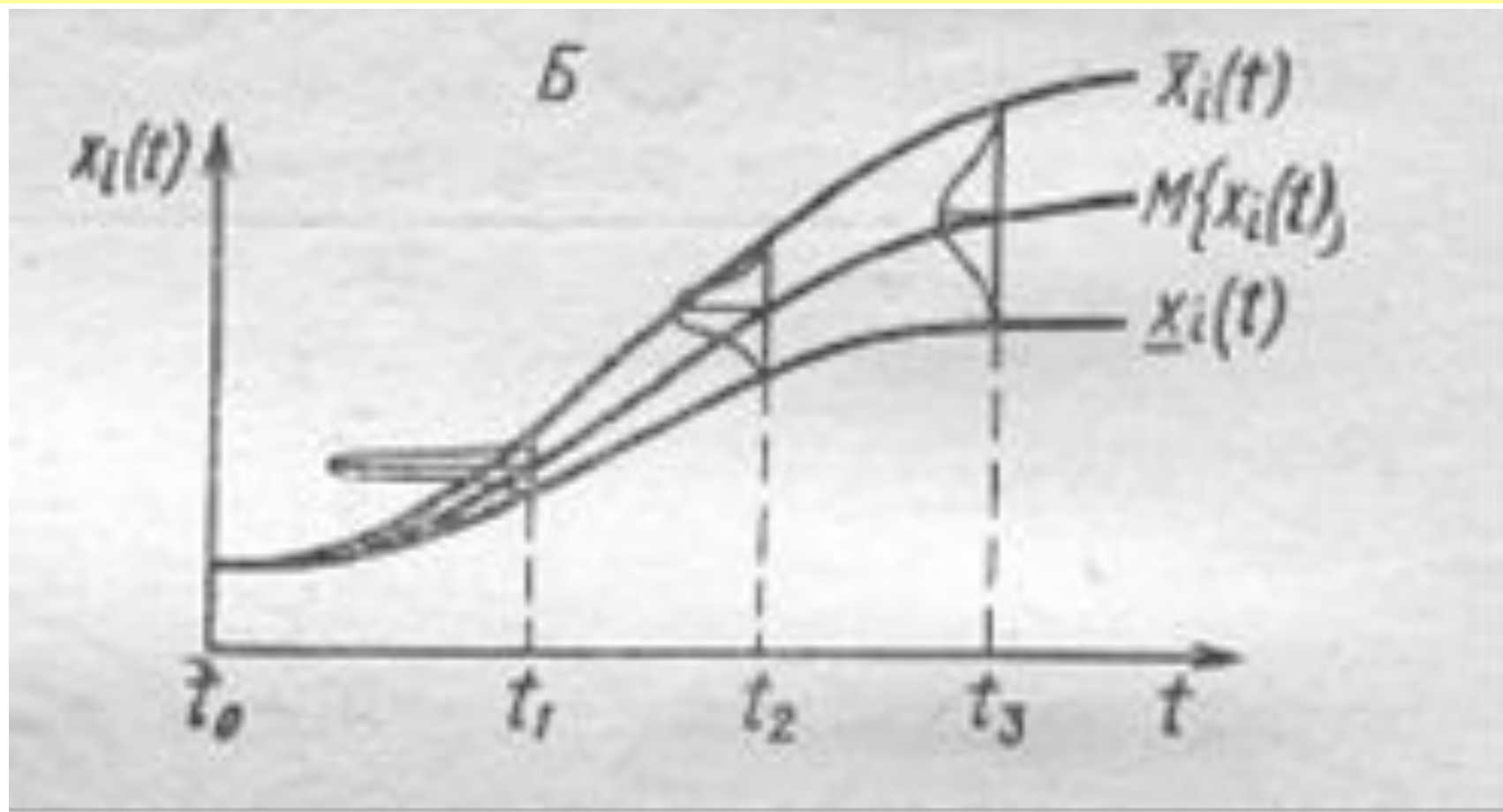
Детерминированные и стохастические (вероятностные) модели:

Графические формы: Детерминированная



Детерминированные и стохастические (вероятностные) модели:

Графические формы: *Стохастическая*



Детерминированные и стохастические (вероятностные) модели:

Резюме:

- 1) предсказывает для любого момента времени t единственное значение переменной $x_i(t)$.
- 2) показывает интервал $[\underline{x}_i(t), X_i(t)]$, содержащий величину $x_i(t)$ и ее распределение на этом интервале.

Дискретные и непрерывные модели:

Критерии определения:

характер временного описания

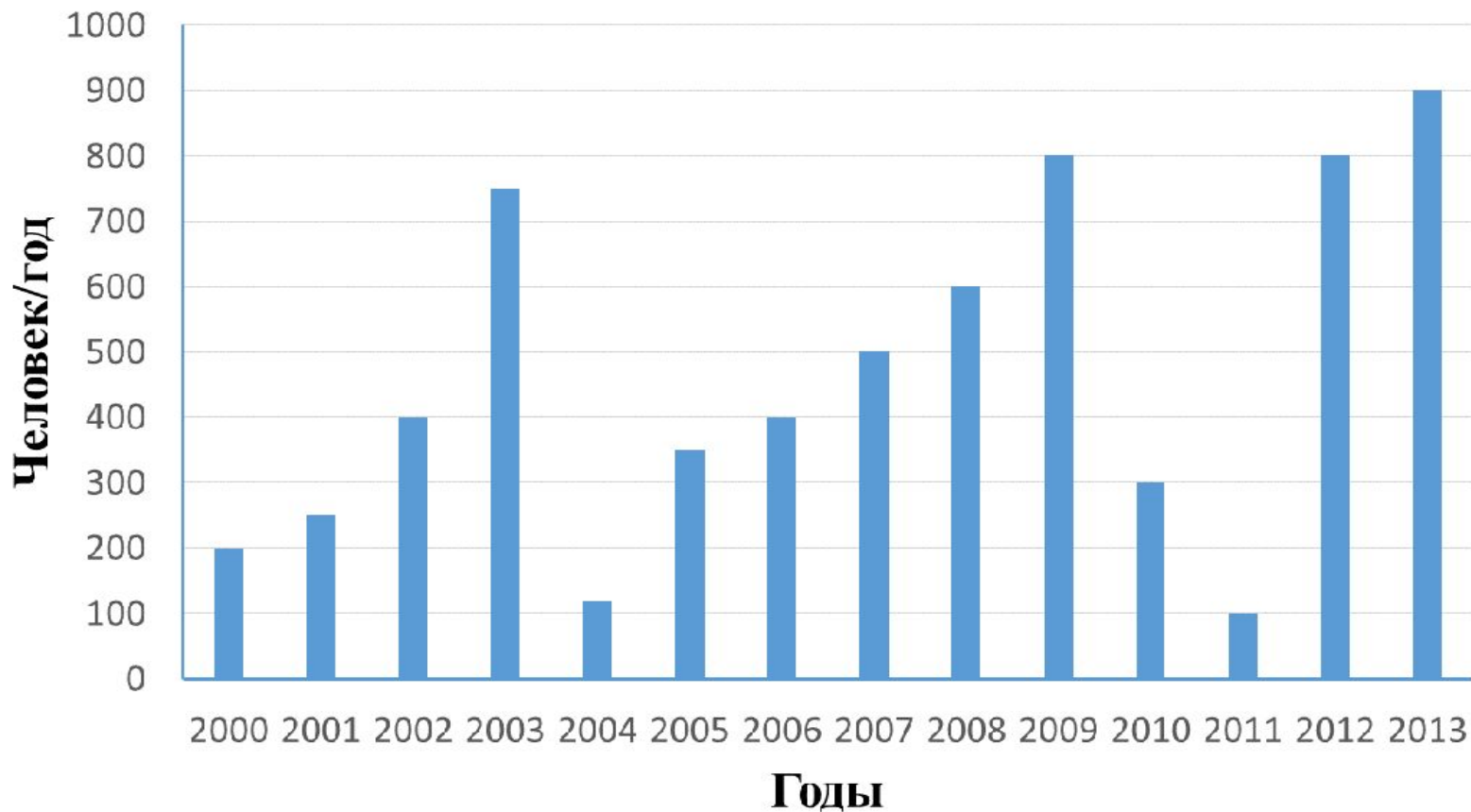
динамики переменных состояния $x_i(t)$

- 1) - поведение системы описывается на фиксированной последовательности моментов времени $t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n$ или в определенных точках пространства;
- 2) - значения переменных можно рассчитать для любой точки пространственного или временного интервала.

Дискретные и непрерывные модели:

Примеры: Дискретная модель

А – Динамика рождаемости на территории Томской области



Дискретные и непрерывные модели:

Примеры: Непрерывная модель



Дискретные динамические модели:

Вид: *Модели с фиксированным шагом во времени* $\Delta t = t_i - t_{i-1}$,
который не может быть изменен без глубокой перестройки всей модели.

Например, в моделях динамики популяции организмов с непрерывающимися поколениями, сменяющимися только один раз в год, принимается $\Delta t = 1$ год

Дискретные динамические модели:

Вид: шаг по времени Δt = может
неограниченно уменьшаться

**(в пределах возможностей
используемой ЭВМ или
программного обеспечения) =**

**По детальности описания временных изменений
приближаются к непрерывным:
модели, получающиеся в результате дискретизации
непрерывного описания изучаемой системы в
процессе приближенного численного решения
дифференциальных уравнений**

Точечные и пространственные модели:

В зависимости от характера описания пространственного строения

1) - пространственное строение экосистемы не рассматривается, т.е. в качестве переменных состояния фигурируют какие-либо переменные, в том числе зависящие от времени $(x_i(t), i = 1, \dots, n)$ = модели с сосредоточенными значениями или точечные моделями. В первом случае это статические точечные модели, во втором – динамические.

2) - переменные состояния x_i зависят от пространственных координат (одной или нескольких), в том числе и с учетом фактора времени, называются моделями с распределенными значениями или пространственными моделями

Точечные модели:

Пример условия статической точечной модели:

1). При моделировании водной экосистемы в качестве переменных состояния можно использовать усредненные по площади и суммированные по глубине значения:

- ▣ биомасс популяций,
- ▣ запасов биогенных элементов и т.д.

2) Каждая в отдельности лимносистема может рассматриваться как одна точка при изучении озер в каких-либо специальных научных программах или при выполнении комплексных экологических изысканий.

Точечные модели:

Пример графического вида статической точечной модели:

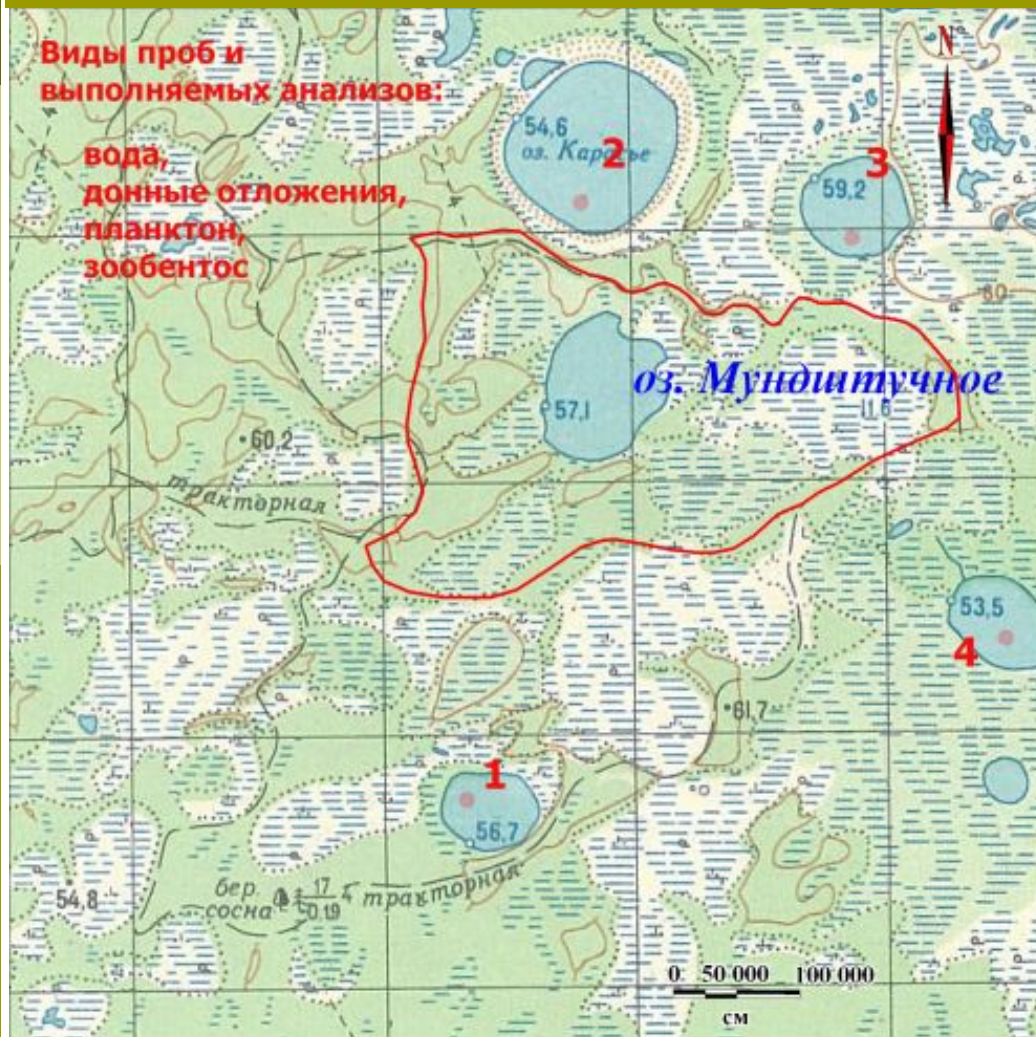


Схема размещения точек опробывания озер в составе комплексных экологических изысканий в районе размещения памятника природы «Озеро Мундштучное»

Пространственные модели:

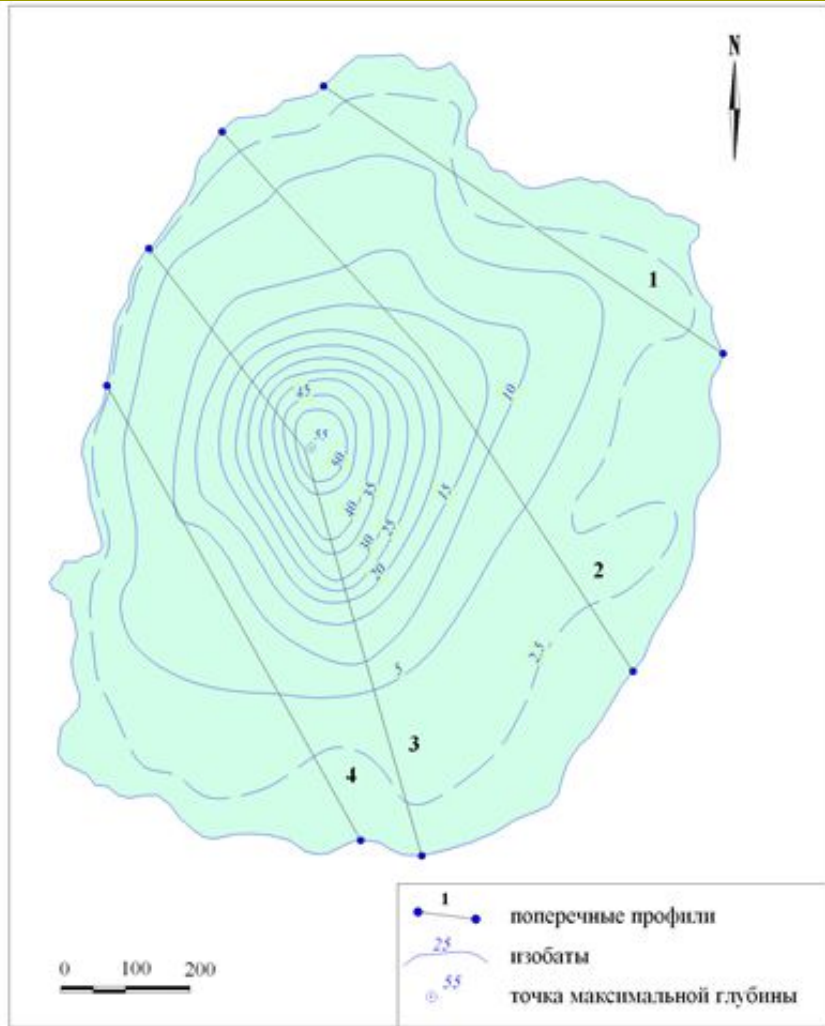
Пример условия статической пространственной модели:

Если в модели **учитывается гетерогенность** по глубине (координата z), т.е. $x_i = x_i(z, t)$, то получается более детальная динамическая модель с распределенными значениями по глубине, **которые также могут быть осредненными по плоскости (x, y) .**

Примером статической пространственной модели, значения переменных состояния в которой выведены на плоскость, является **рельеф дна или распределение глубин** в границах акватории любого исследуемого водоема.

Пространственные модели:

Пример графического вида статической пространственной модели:



При описании мелкого, хорошо перемешиваемого по вертикали, но гетерогенного по плоскости водоема (например, в случае разного механического состава донных отложений) в качестве переменных состояния можно использовать функции вида $x_i = x_i(x, y, t)$. Наконец, вводя все три пространственные координаты $x_i = x_i(x, y, z, t)$, можно получить трехмерную динамическую модель с пространственно распределенными значениями.

Схема акватории озера Мундштучное с изобатами, м

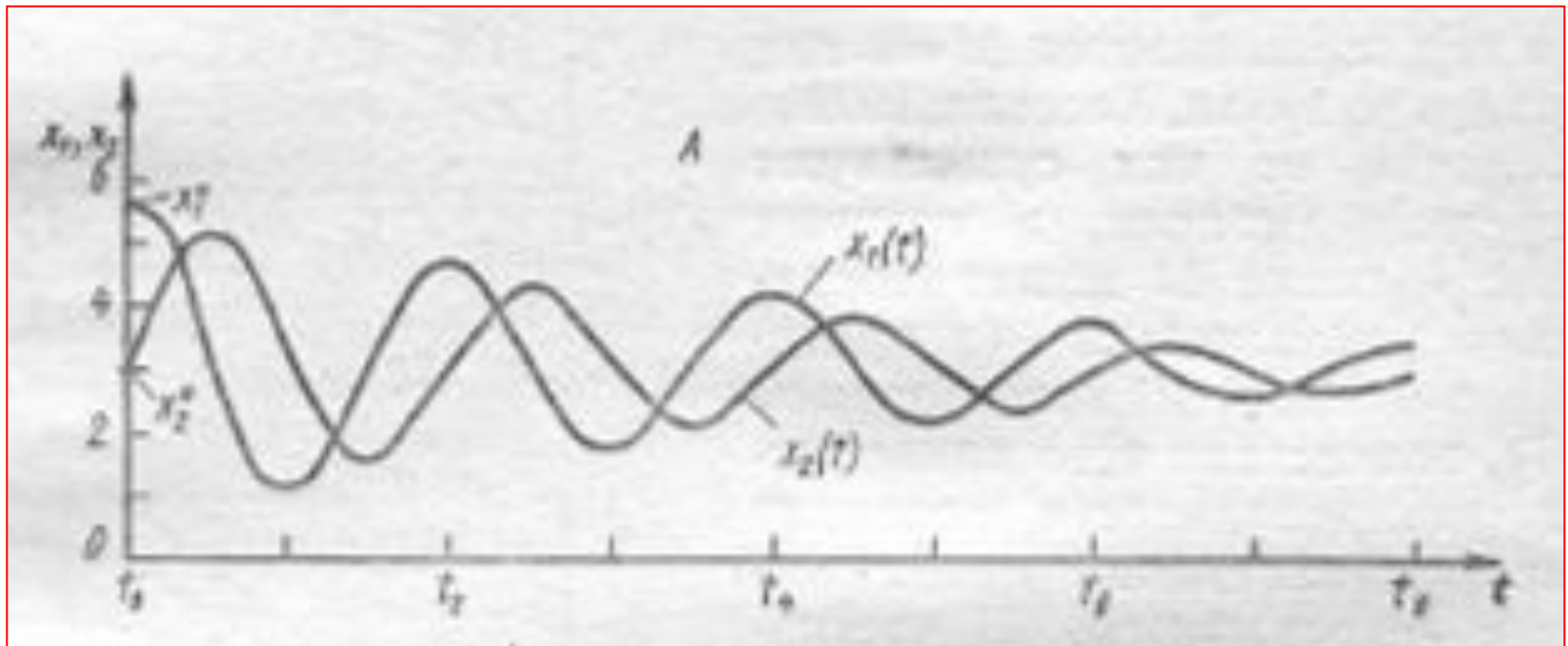
О способах визуального представления результатов моделирования.

Динамические модели:

- различные графики и схемы для визуализации;
- способ развертки во времени = реализуется путем построения таблиц или графиков изменения входных переменных и переменных состояния как функций времени **t**

О способах визуального представления результатов моделирования.

Динамические модели:



Развертка во времени

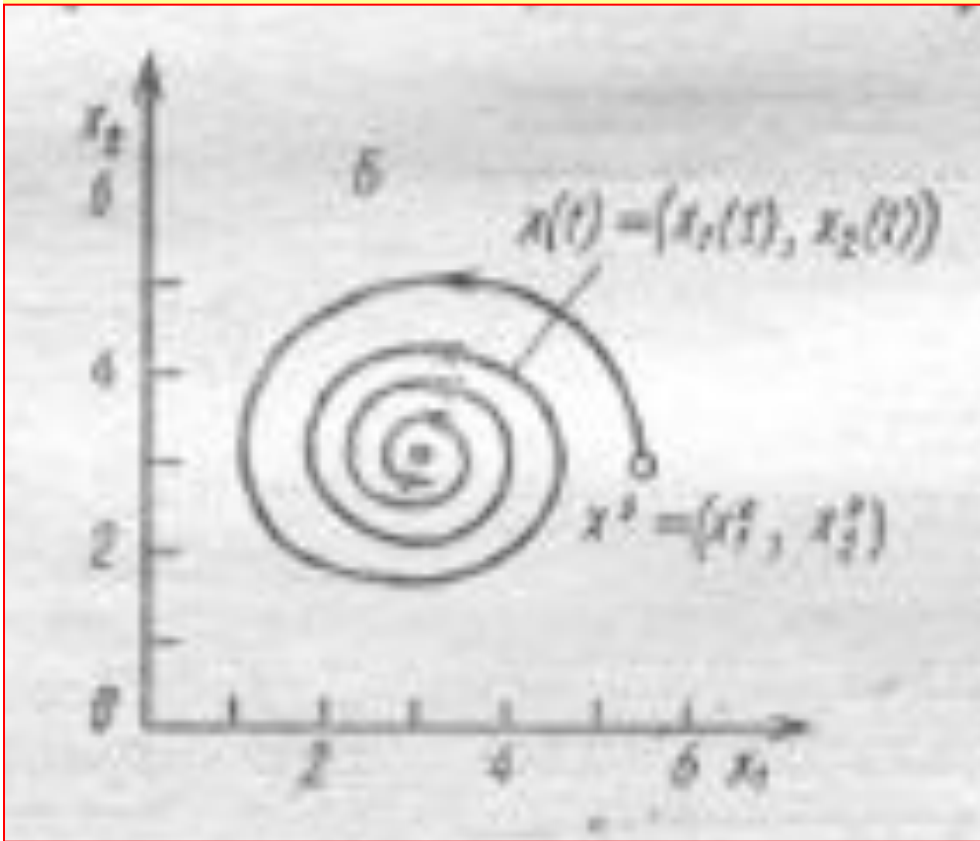
О способах визуального представления результатов моделирования.

Динамические модели:

- 1). При большом числе переменных **в дополнение к способу развертки во времени используется способ фазовых портретов.**
- 2). В этом случае на график наносится изображение траектории системы в пространстве состояний **(при $n=2$ или 3)** или проекции этой траектории на координатные плоскости (x_i, x_j) , образованные различными парами координат при **$n > 3$.**
- 3). Время на фазовом портрете присутствует неявно, через указание тем или иным способом направления движения изображающей точки вдоль траектории, например, с помощью стрелок или отметок времени вдоль траектории.

О способах визуального представления результатов моделирования.

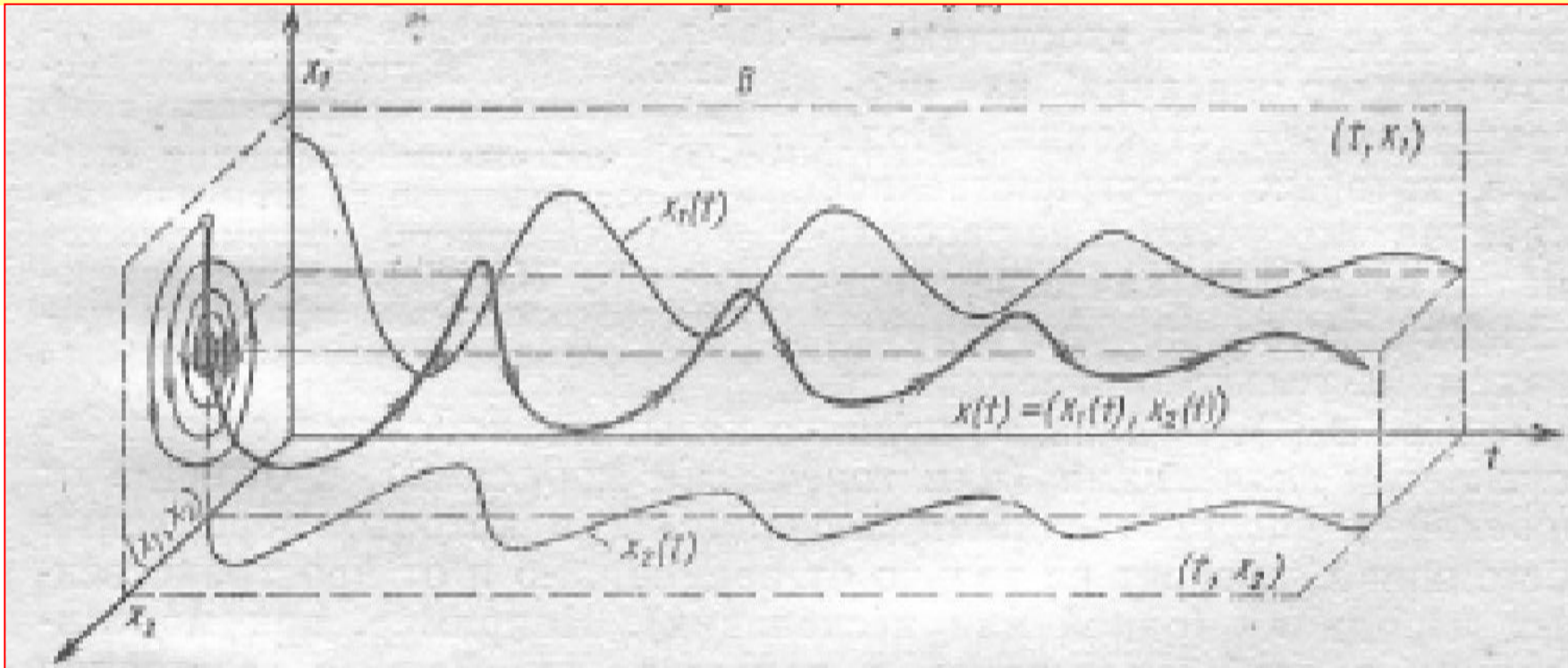
Динамические модели:



Фазовый портрет

О способах визуального представления результатов моделирования.

Динамические модели:



Соотношение развертки во времени и фазового портрета

Классификация моделей по масштабности научных взглядов и проблем:

- ▣ **локальные модели, освещающие действительность с какой-либо узкой («местной») точки зрения,**
- ▣ **парадигмы – модели общего значения, представляющие ценность для широкого круга ученых**

Парадигма:

(от греческого paradeigma)

– пример, образец:

1) строго научная теория, воплощенная в системе понятий, выражающих существенные черты действительности;

2) исходная концептуальная схема, модель постановки проблем и их решения, методов исследования, господствующих в течение определенного исторического периода в науке.

Классификация моделей по пространственному масштабу моделирования:

- ▣ **локальные модели – топологический уровень,**
- ▣ **региональные модели – региональный уровень,**
- ▣ **глобальные модели – планетарный и субпланетарный уровень.**