

Кафедра медицинской и биологической физики

**Тема: Интегральное исчисление
Дифференциальные уравнения**

лекция № 2 для студентов 1 курса,
обучающихся по специальности
31.05.01 – Лечебное дело

К.п.н., доцент Шилина Н.Г.
Красноярск, 2016

План лекции:

- Понятие неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла
 - Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла
 - Таблица интегралов от некоторых функций. Способы вычисления интегралов
 - Типы дифференциальных уравнений и способы их решения
-

Понятие неопределенного интеграла

- Функция $F(x)$, называется первообразной для функции $f(x)$, если ее производная $F'(x)$ равна данной функции, $F'(x) = f(x)$, а $dF(x) = f(x)dx$.
 - Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ для данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом (обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция, C – постоянная).
-

Свойства неопределенного интеграла

- дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d \int F(x) dx = F(x) dx$;
 - неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции: $\int F(x) dx = F(x) + C$;
 - постоянный множитель выносится за знак интеграла: $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$;
 - интеграл суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов этих функций: $\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \int f_3(x) dx$.
-

Таблица интегралов основных функций

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

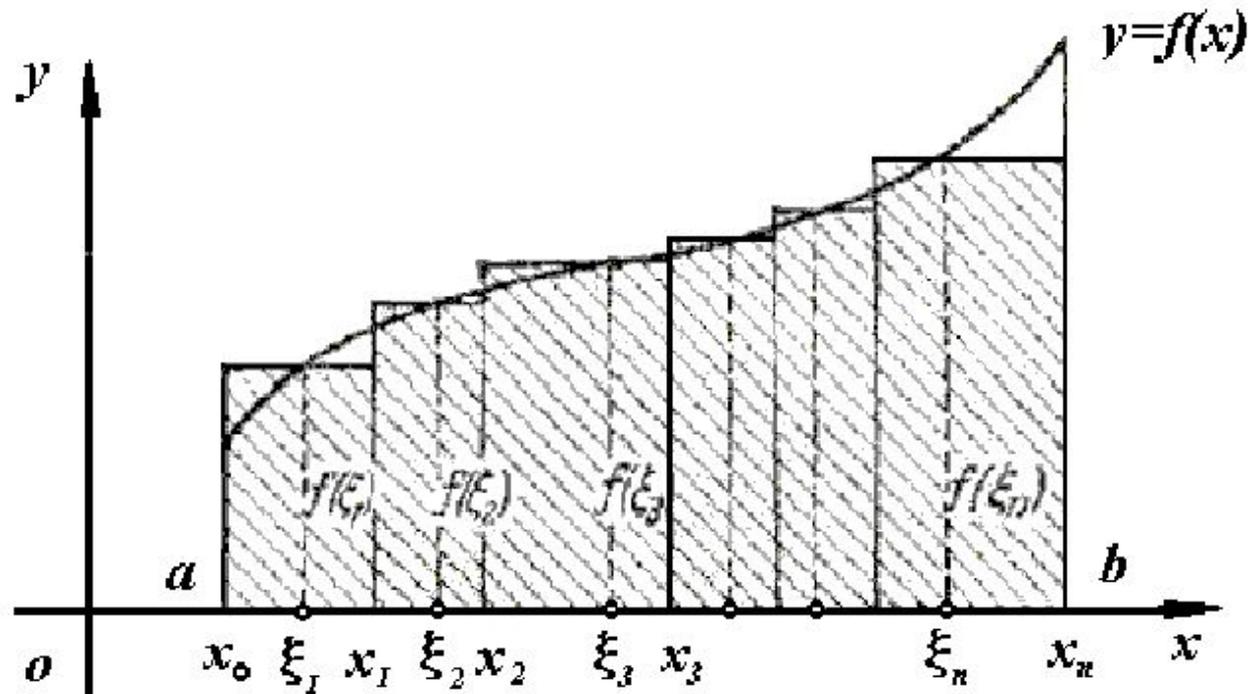
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

Методы интегрирования

- Интегрирование по формулам. Этот метод основан на использовании таблицы интегралов основных функций и свойствах неопределенного интеграла
 - Интегрирование методом замены переменной (или метод подстановки). Этот способ применяется для упрощения подынтегрального выражения и сведения интеграла к табличному. Вводится новая переменная $z=f(x)$, находится ее дифференциал $dz=z'dx$, выражается $dx = \frac{dz}{z'}$, и все подынтегральное выражение записывается в новых переменных z .
-

Понятие определенного интеграла



Понятие определенного интеграла

- Выражение $\int_a^b f(x)dx$ называют определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[ab]$.
 - Если неопределенный интеграл представляет собой совокупность функций, отстоящих друг от друга на величину C , то определенный интеграл – это всегда число, значение которого определяется видом подынтегральной функции и значениями верхнего (b) и нижнего (a) пределов интегрирования.
-

Свойства определенного интеграла

- при смене пределов интегрирования меняется знак у определенного интеграла $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- если пределы интегрирования равны между собой, то $\int_a^a f(x)dx = 0$
- если точка c принадлежит отрезку $[ab]$, то выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Формула Ньютона -Лейбница

- Чтобы вычислить определенный интеграл необходимо найти его первообразную (неопределенный интеграл) и подставить пределы интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Дифференциальные уравнения

- Уравнение, содержащее независимую переменную x , функцию $f(x)$ и ее производные от первого до n -го порядка, называется дифференциальным. $F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), C) = 0$.
 - Порядок дифференциального уравнения определяется порядком наивысшей производной.
 - Решением дифференциального уравнения называется функция $y = f(x)$, которая при подстановке обращает это уравнение в тождество.
-

Алгоритм решения дифференциальных уравнений

- представить производную в дифференциальной форме, т.е. $y' = \frac{dy}{dx}$;
 - разделить переменные, т.е. все, что относится к одной переменной (x) собрать в одной части равенства, а все, что относится к другой переменной (y) – в другой части равенства;
 - проинтегрировать обе части равенства и записать решение в виде $y=f(x)$;
 - выполнить проверку.
-

Основные типы дифференциальных уравнений и способы их решения

- уравнение вида $y' = f(x)$.

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$dy = f(x) \cdot dx$$

$$\int dy = \int f(x) dx$$

$$y = F(x) + c$$

□ уравнение вида $y' = f(y)$.

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

$$\frac{dy}{f(y)} = dx$$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx$$

$$F(y) = x + c$$

- уравнение с разделяющимися переменными вида

$$f_1(x)\Psi_1(y)dx + f_2(x)\Psi_2(y)dy = 0$$

$$f_1(x) \cdot \Psi_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot \Psi_2(y) \cdot dy = 0$$

$$f_1(x)\Psi_1(y) \cdot dx = -f_2(x) \cdot \Psi_2(y) \cdot dy$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = -\frac{\Psi_2(y)}{\Psi_1(y)} dy$$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = -\int \frac{\Psi_2(y)}{\Psi_1(y)} dy$$

$$F(x) + c = F(y)$$

Общее и частное решение дифференциального уравнения

- Константа может быть выбрана в любом виде (произвольно) для удобства решения. И тогда получают общее решение дифференциального уравнения.
 - Если же заданы начальные условия, то константа вычисляется и имеет вполне определенное значение. Тогда можно говорить о частном решении дифференциального уравнения.
-

Заключение

Нами рассмотрены:

- понятия неопределенного и определенного интегралов, а также показаны на примерах способы их решения;
 - виды дифференциальных уравнений, алгоритмы их решения.
-

Тест-контроль

Порядок дифференциального уравнения определяется порядком входящей в него:

1. функции
 2. аргумента
 3. высшей производной
 4. низшей производной
-

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Обязательная:

1. Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики: учебник для мед.вузов.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2007.-

Дополнительная:

1. Математика в примерах и задачах: учебное пособие /Л.Н.Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В.Никонова и др.- М.: ИНФРА-М, 2010.-
2. Шаповалов К.А. Основы высшей математики: учебное пособие. - Красноярск: Печатные технологии, 2004
3. Математика: метод. указания к внеаудит. работе для студ. по спец. – педиатрия /сост. Л.А.Шапиро и др.- Красноярск: тип.КрасГМУ, 2009.-

Электронные ресурсы:

1. ЭБС КрасГМУ
 2. Ресурсы интернет
-



Красноярский
Государственный
Медицинский
Университет
им. проф.
В.Ф.Войно-Ясенецкого



**БЛАГОДАРЮ
ЗА ВНИМАНИЕ**