

Формирование базовых компетенций студентов технического университета

НОЦ 4

**М.А.Вигура, О.А.Кеда, А.Ф.Рыбалко,
Н.М.Рыбалко, А.Б.Соболев**

Математика

Поточная практика 7.1

Аналитическая геометрия

Прямая на плоскости

УГТУ-УПИ
2007г.

Цель занятия:

- 1.** Овладеть соответствующим математическим аппаратом для дальнейшего изучения курса математики, демонстрировать и использовать математические методы в ходе изучения специальных дисциплин для будущей профессиональной деятельности.
- 2.** Уметь решать разнообразные задачи о расположении прямых на плоскости.

Формируемые компетенции по ФГОС:

ОНК1: способность и готовность использовать фундаментальные математические законы в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и теоретического исследования.

ИК1: способность использовать современные средства вычислительной техники, коммуникаций и связи.

ИК4: готовность работать с информацией из различных источников (сбор, обработка, анализ, систематизация, представление).

СЛК3: способность самостоятельно приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии.



Прямая на плоскости.

1.Теоретическая
часть

2.Задачи

3.Решения задач

Оглавление



Прямая на плоскости.

1. Простейшие задачи на плоскости

[1.1 Расстояние между двумя точками](#)

[1.2 Деление отрезка в данном отношении](#)

2. Прямая линия на плоскости

[2.1 Общее уравнение прямой](#)

[2.2 Канонические уравнения прямой](#)

[2.3 Уравнение прямой, проходящей через две точки](#)

[2.4 Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении](#)

[2.5 Уравнение прямой в отрезках](#)

[2.6 Нормальное уравнение прямой](#)

[2.7 Расстояние от точки до прямой](#)

[2.8 Координаты точки пересечения двух прямых](#)

[2.9 Угол между двумя прямыми](#)

[2.10 Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых](#)

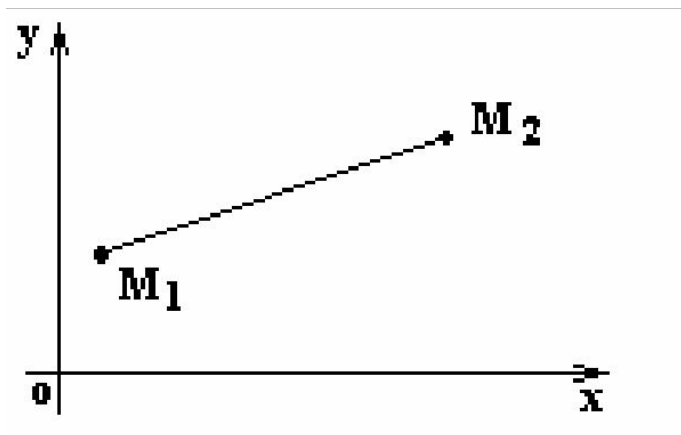
[2.11 Уравнение пучка прямых](#)

3. Основные формулы



1.ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТИ

Расстояние между двумя точками



$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$$

Вектор

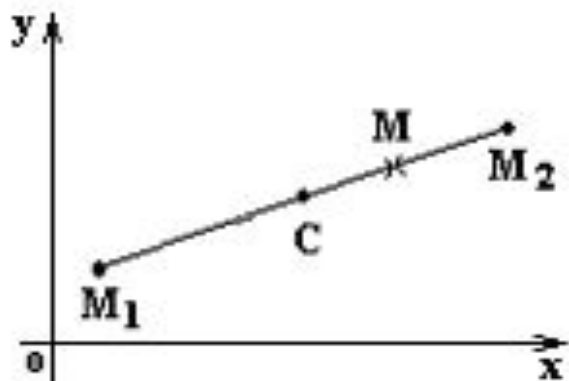
$$\vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$$

$$d = |\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Деление отрезка в данном отношении



Точка $M(x, y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ :

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda, \quad |M_1M| = \lambda |MM_2|, \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda,$$

координаты точки M находятся по формулам:

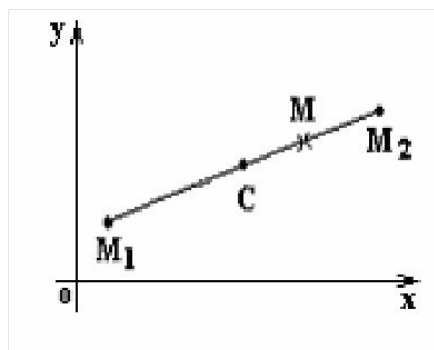
$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Координаты середины отрезка



$$M_1C = CM_2, \lambda = 1:$$

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

2.ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Общее уравнение прямой

Общее уравнение прямой на плоскости XOY получается из общего уравнения плоскости в пространстве при $z = 0$.

$$L: Ax + By + C = 0.$$

$$A = 0 \ (B = 0) \implies L \parallel OX \ (\parallel OY); \quad C = 0 \implies (0, 0) \in L.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A, B\}$, принимает вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Канонические и параметрические уравнения прямой

Уравнения прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{a} = \{l, m\}$:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Rightarrow$$

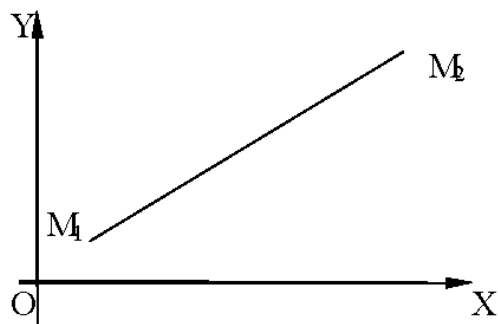
$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \quad t \in (-\infty, \infty).$$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Уравнение прямой, проходящей через две точки



$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$$

$$z = z_1 = z_2 = z_3 = 0$$

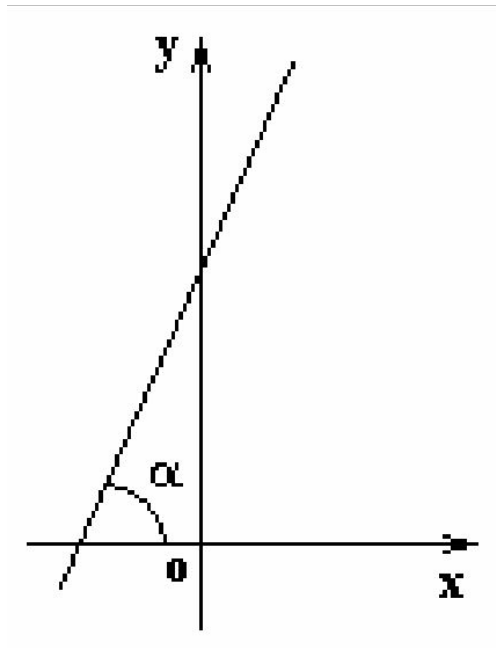
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении



Прямая составляет угол α с осью OX .

Угловым коэффициентом прямой называется число $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Из общего уравнения прямой

$$Ax + By + C = 0, \quad B \neq 0 \Rightarrow$$

$$y = kx + b, \quad k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

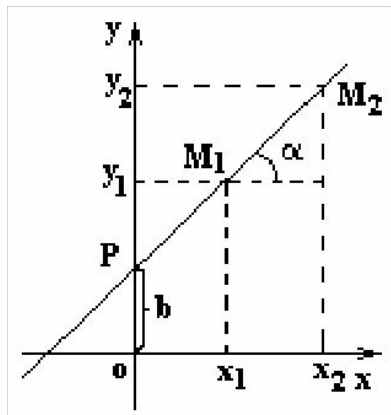
Прямая пересекает ось OY в точке $(0, b)$.



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении



Прямая задана двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Из уравнения прямой, проходящей через две точки, имеем

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha = k.$$

$$y = y_1 + k(x - x_1).$$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Уравнение прямой в отрезках

Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ может быть преобразовано к виду уравнения прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Прямая в отрезках пересекает ось OX в точке $A(a, 0)$ и ось OY в точке $B(0, b)$.



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Нормальное уравнение прямой

Из нормального уравнения плоскости в пространстве, полагая $z = 0$ и учитывая, что

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha,$$

получаем нормальное уравнение прямой на плоскости в виде:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Здесь $\left| \begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix} \right|_{OP} = p$ - расстояние от прямой до начала координат,

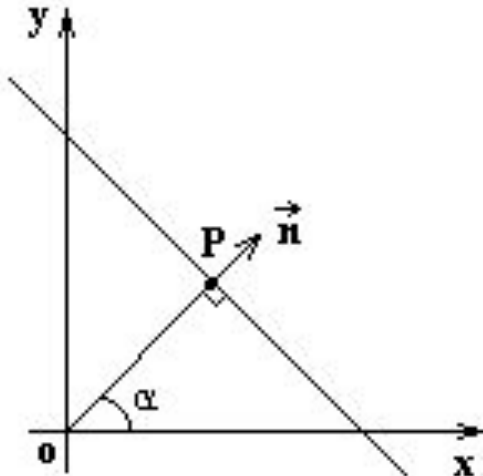
α - угол между перпендикуляром к прямой и осью OX .



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Нормальное уравнение прямой



Умножим $Ax + By + C = 0$
на нормирующий множитель

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак числа μ должен быть
противоположен знаку C .

Косинусы углов,
образуемых прямой
с осями координат, называются
направляющими косинусами прямой.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$$



Расстояние от точки до прямой

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $L: Ax + By + C = 0$,
 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$:

$$\begin{aligned} \rho(M_0, L) = d &= |\delta| = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p| = \\ &= \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

$\delta > 0$ - точка M_0 и начало координат лежат по разные стороны от прямой, в противном случае $\delta < 0$.



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Координаты точки пересечения двух прямых

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0),$$

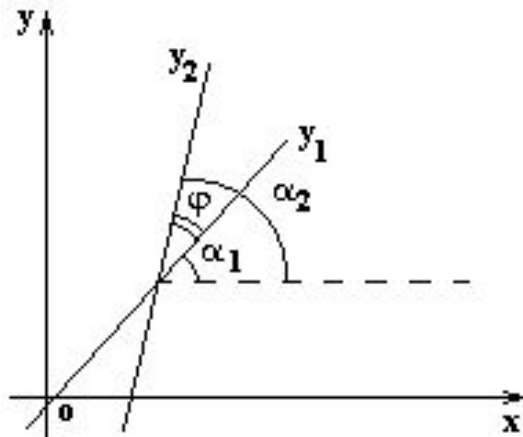
$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \text{ по формулам Крамера, если } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Угол между двумя прямыми



$$L_1: y_1 = k_1x + b_1,$$

$$L_2: y_2 = k_2x + b_2.$$

Острый угол φ пересечения этих прямых (отсчитываемый против часовой стрелки) находится по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} \right|$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|.$$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

$$L_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad L_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{A_2}{B_2},$$

угол φ между прямыми определяется формулой:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|.$$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых

$$L_1: y_1 = k_1 x + b_1, \quad L_2: y_2 = k_2 x + b_2.$$

$$L_1 \parallel L_2 \Rightarrow k_1 = k_2 \quad (\varphi = 0, \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right| = 0)$$

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow k_1 k_2 = -1 \quad (\varphi = \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right| \rightarrow \infty) \quad \boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}}$$

$$L_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad L_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0:$$

$$L_1 \parallel L_2 \Rightarrow A_1 B_1 - A_2 B_1 = 0, \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2},$$

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Уравнение пучка прямых

Совокупность всех прямых плоскости, проходящих через некоторую точку $M_o(x_0, y_0)$, называется **пучком** прямых с центром M_o .

Если $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ - уравнения двух прямых, пересекающихся в точке M_o ; то уравнение $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ определяет все прямые пучка, кроме второй из прямых.



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

3.ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

-расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$;

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \\ \lambda \neq -1 \end{cases}$$

-координаты точки $C(x, y)$, которая делит отрезок, соединяющий точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, в отношении

$$\lambda = \frac{AC}{CB};$$

-координаты середины отрезка AB ;

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

-условие
принадлежности трёх
точек (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ,
 (x_3, y_3) одной прямой;

$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right\|$$

- площадь треугольника
с вершинами (x_1, y_1) ,
 (x_2, y_2) , (x_3, y_3) .



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

$$Ax + By + C = 0$$

- общее уравнение прямой;

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

- уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) перпендикулярно нормальному вектору $\{A, B\}$;

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

- каноническое уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) параллельно вектору $\{l, m\}$;



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ t \in (-\infty, \infty) \end{cases}$$

- параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) параллельно вектору $\{1, m\}$;

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

- уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) ;

$$\begin{aligned} y &= kx + b, \\ k &= \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

- уравнение прямой с угловым коэффициентом k , где $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ - угол наклона прямой к оси ox ;



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \\ a \neq 0, b \neq 0$$

- уравнение прямой в отрезках, где $(a,0)$ и $(0,b)$ - координаты точек пересечения прямой с осями ox и oy ;

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

- нормальное уравнение прямой, где p - расстояние от начала координат до прямой, α -угол между осью ox и перпендикуляром к прямой, проходящем через начало координат;

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

- нормальный вид общего уравнения прямой; знак нормирующего множителя противоположен знаку C ;



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$;

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \\ y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \end{cases}$$

- координаты точек пересечения двух прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$;

$$\begin{cases} x_0 = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}, \\ y_0 = \frac{b_2k_1 - b_1k_2}{k_1 - k_2} \end{cases}$$

- координаты точек пересечения прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$;



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

$$\begin{aligned} A_1 B_2 - A_2 B_1 &= 0, \\ k_1 &= k_2 \end{aligned}$$

- условия параллельности прямых, заданных в общем виде $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ и в виде $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$;

$$\begin{aligned} A_1 A_2 + B_1 B_2 &= 0, \\ k_1 k_2 &= -1 \end{aligned}$$

- условие перпендикулярности прямых, заданных в общем виде $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ и в виде $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$;



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

$$k_1 k_2 \neq -1,$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ если } k_1 k_2 = -1.$$

- угол α между двумя прямыми, заданными в общем виде $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ и в виде $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$;

$$A_1 x + B_1 y + C_1 + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$$

- уравнение пучка прямых через точку M , если $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ - уравнения двух прямых, пересекающихся в точке M .



Прямая на плоскости.

Задача №:

<u>1</u>
<u>2</u>
<u>3</u>
<u>4</u>
<u>5</u>
<u>6</u>

[Оглавление:](#)



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Решение задачи №:

<u>1а</u>	<u>2</u>
<u>1б</u>	<u>3</u>
<u>1в</u>	<u>4</u>
<u>1г</u>	<u>5</u>
<u>1д</u>	<u>6</u>
<u>1ж</u>	
<u>1з</u>	
<u>1и</u>	
<u>1к</u>	
<u>1л</u>	



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Треугольник задан уравнениями трех его сторон:

$$AC: \quad x - 2y + 5 = 0,$$

$$AB: \quad x + 2y - 3 = 0,$$

$$BC: \quad 2x + y - 15 = 0.$$

Определите следующие элементы треугольника:

- а) координаты вершин,
- б) уравнения высот,
- в) уравнения медиан,
- г) длины сторон,
- д) уравнения биссектрис,
- ж) центр и радиус вписанной окружности,
- з) центр и радиус описанной окружности,
- и) центр тяжести треугольника,
- к) внутренние углы треугольника,
- л) площадь треугольника.

Задача 1

Ответ:

[Решение:](#)



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Найдите проекцию точки $P (4, 9)$ на прямую,
проходящую через точки $A (3, 1)$ и $B (5, 2)$.

Задача 2

Ответ: $(7, 3)$

[Решение:](#)



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Постройте прямую $3x - 5y + 15 = 0$.

Задача 3

Ответ:

[Решение:](#)



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Даны две прямые $L_1: 2x + 3y - 5 = 0$, $L_2: 7x + 15y + 1 = 0$, пересекающиеся в точке M . Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку M перпендикулярно к прямой

$$L_3: 12x - 5y - 1 = 0.$$

Задача 4

Ответ: $5x + 12y + 6 = 0$.

[Решение:](#)



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Напишите уравнение прямой L , проходящей через точку $M(2, 1)$
под углом 45° к прямой $L_l: 2x + 3y + 4 = 0$.

Задача 5

Ответ:
$$\begin{cases} x - 5y + 3 = 0, \\ 5x + y - 11 = 0 \end{cases}$$

[Решение:](#)



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Составьте уравнение прямой L , параллельной прямым

$$L_1: x + 2y - 1 = 0 \text{ и } L_2: x + 2y + 2 = 0$$

и проходящей посередине между ними.

Задача 6

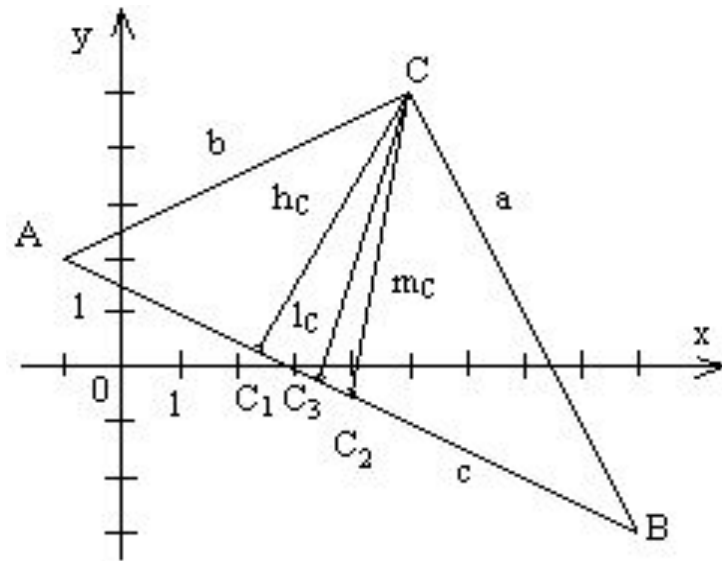
Ответ: $x + 2y + 1/2 = 0$

[Решение:](#)



Оглавление:

а) **Координаты вершин** треугольника находятся как точки пересечения соответствующих сторон:

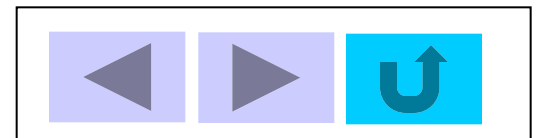


$$\begin{cases} AC: x-2y+5=0, \\ AB: x+2y-3=0, \end{cases} \quad A (-1, 2).$$

Аналогично $B(9, -3)$ и $C(5, 5)$.

Решение задачи 1

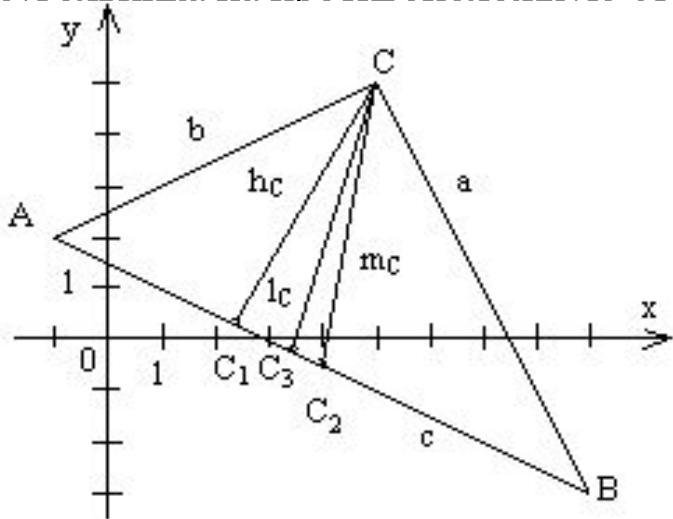
Ответ: а) $A(-1, 2), B(9, -3), C(5, 5)$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

б) **Высотой** треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону.



$$h_c = CC_1 \perp AB, \quad CC_1: y = k_1x + b,$$

$$AB: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \quad k_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$k_1 k_2 = -1 \rightarrow k_1 = 2.$$

$$C(5, 5) \in CC_1, \quad h_c: y - 5 = 2 \cdot (x - 5), \quad y = 2x - 5.$$

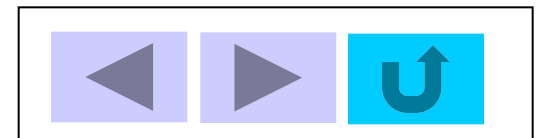
$$AC: y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, \quad BC: y = -2x + 5 \Rightarrow AC \perp BC,$$

треугольник является прямоугольным,

$$h_A: y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}; \quad h_B: y = -2x + 15.$$

Решение [задачи 1](#)

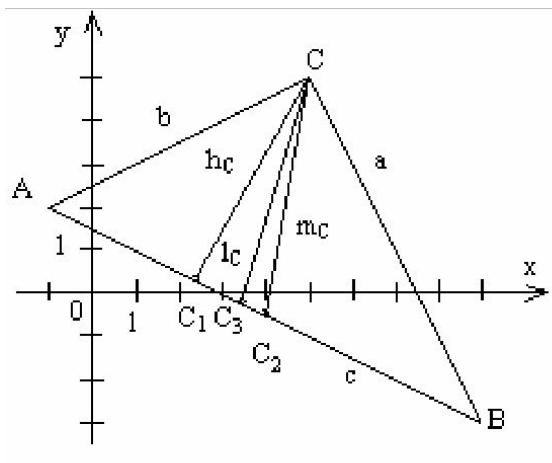
Ответ: б) $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
 $y = -2x + 15$
 $y = 2x - 5$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

в) **Медианой** называется отрезок прямой, соединяющей вершину треугольника с серединой противоположной стороны.



Координаты середин сторон:
 $C_2 (4, -1/2), B_2 (2, 7/2), A_2 (7, 1).$

$m_C = CC_2, C \in m_C, C_2 \in m_C:$

$$m_C: \frac{y-5}{-1/2-5} = \frac{x-5}{4-5}$$

$$11x - 2y - 45 = 0.$$

Аналогично $m_B: 13x + 14y - 75 = 0,$

$$m_A: x + 8y - 15 = 0.$$

г) **Длины сторон:**

$$|AB| = c = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}, \quad |BC| = a = 4\sqrt{5},$$

$$|AC| = b = 3\sqrt{5}.$$

Решение [задачи 1](#)

Ответ:

в) $x + 8y - 15 = 0,$
 $13x + 14y - 75 = 0, 11x - 2y - 45 = 0$

г) $5\sqrt{5},$
 $4\sqrt{5},$
 $3\sqrt{5}$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

д) **Биссектрисой** треугольника называется лежащий в треугольнике отрезок прямой, которая делит его внутренний угол пополам.

1-ый способ. Биссектриса делит противоположащую сторону в отношении, пропорциональном прилежащим сторонам.

Если C_3 – точка пересечения биссектрисы $l_C = CC_3$ со стороной AC , то

$$\frac{AC_3}{C_3B} = \frac{AC}{CB} = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}.$$

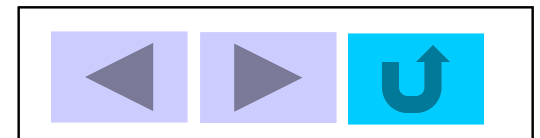
Координаты точки C_3 находим по формулам деления отрезка в отношении $\lambda = 3/4$: $C_3 (23/7, -1/7)$.

Уравнение биссектрисы $l_C = CC_3$ получается как уравнение прямой, проходящей через точки C_3 и $C (5, 5)$:

$$\frac{y-5}{-1/7-5} = \frac{x-5}{23/7-5} \quad \text{или} \quad 3x - y - 10 = 0.$$

Решение [задачи 1](#)

Ответ: д) $y = 2$, $x+y-6=0$, $3x-y-10=0$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

2-ой способ. Уравнение биссектрисы $l_C = CC_3$ может быть найдено из условия того, что точки биссектрисы CC_3 равноудалены от сторон AC и CB .

Вычислим отклонения точки (x, y) , лежащей на биссектрисе, от сторон AC и CB :

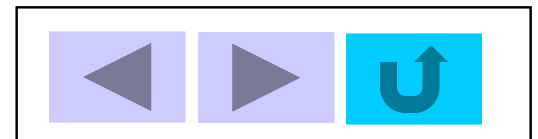
$$\delta_{AC} = \frac{x - 2y + 5}{-\sqrt{5}}, \quad \delta_{CB} = \frac{2x + y - 15}{\sqrt{5}}.$$

Оба отклонения отрицательны, так как начало координат и точки биссектрисы треугольника лежат по одну сторону от каждой из сторон AC и CB .

$$d_{AC} = d_{CB} \Rightarrow |\delta_{AC}| = |\delta_{CB}|: \quad \frac{x - 2y + 5}{\sqrt{5}} = -\frac{2x + y - 15}{\sqrt{5}} \Rightarrow l_C: 3x - y - 10 = 0.$$

Решение [задачи 1](#)

Ответ: д) $y = 2$, $x + y - 6 = 0$, $3x - y - 10 = 0$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

$l_A :$

$\delta_{AC} = -\frac{x-2y+5}{\sqrt{5}} < 0$, так как начало координат и биссектриса l_A лежат

по одну сторону от стороны AC ;

$\delta_{AB} = \frac{x+2y-3}{\sqrt{5}} > 0$, так как начало координат и биссектриса l_A лежат

по разные стороны от стороны AB .

$$-\delta_{AC} = \delta_{AB}, \quad \frac{x-2y+5}{\sqrt{5}} = \frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}, \quad x-2y+5 = x+2y-3,$$

$$4y = 8, \quad l_A: y = 2.$$

$$l_B: x+y-6=0.$$

Решение [задачи 1](#)

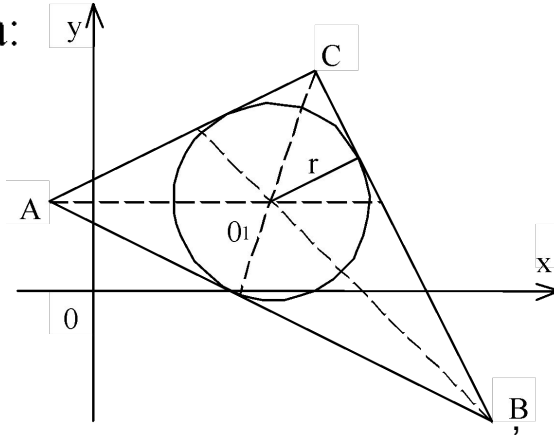
Ответ: д) $y = 2$, $x+y-6=0$, $3x-y-10=0$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

ж) **Центр вписанной окружности** находится в точке пересечения биссектрис треугольника:



$$\begin{cases} k_C: y - 10 = 0, \\ k_A: x = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

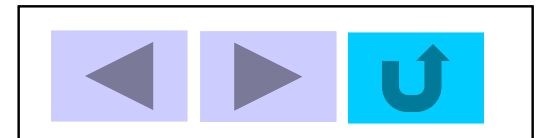
$$x = 4, y = 2, O_1(4, 2).$$

$$AC: x - 2y + 5 = 0$$

$$\begin{aligned} r = \rho(O_1, AC) &= -\frac{x_0 - 2y_0 + 5}{\sqrt{5}} \Big|_{(4,2)} = \\ &= \left| -\frac{4 - 4 + 5}{\sqrt{5}} \right| = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Решение [задачи 1](#)

Ответ: ж) $O_1(4, 2), r = \sqrt{5}$

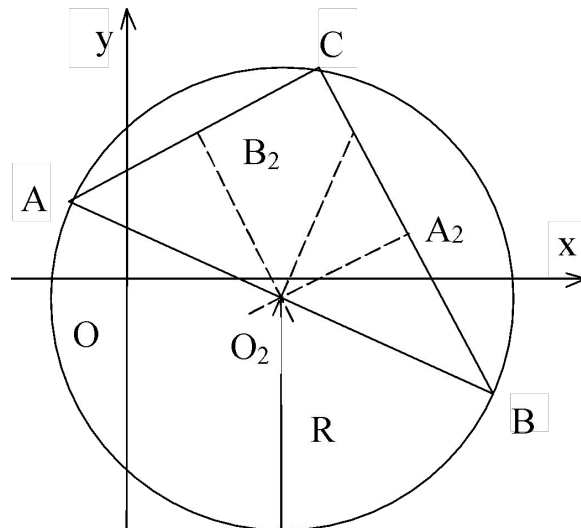


Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

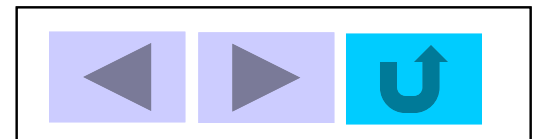
3) **Центр описанной окружности** находится в точке пересечения серединных перпендикуляров.

Координаты середин сторон AC и AB: $C_2 (4, -1/2)$, $B_2 (2, 7/2)$.



Решение [задачи 1](#)

Ответ: 3) $O_2(4, -1/2), R = \frac{5\sqrt{5}}{2}$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Угловые коэффициенты h_{C_2} и h_{B_2} равны 2 и -2 соответственно, и эти прямые проходят через точки C_2 и B_2 . Система уравнений, составленная из уравнений серединных перпендикуляров:

$$\begin{cases} h_{C_2} : y + \frac{1}{2} = 2(x - 4), 4x - 2y - 17 = 0, \\ h_{B_2} : y - \frac{7}{2} = -2(x - 4), 4x + 2y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = -1/2,$$

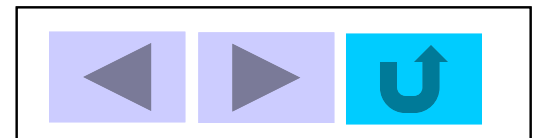
центр описанной окружности находится в точке $O_2(4, -1/2)$.

Центр описанной окружности прямоугольного треугольника - середина

гипотенузы AB : $R = \frac{1}{2}|AB| = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Решение [задачи 1](#)

Ответ: 3) $O_2(4, -1/2), R = \frac{5\sqrt{5}}{2}$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

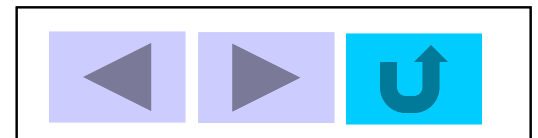
и) **Центр тяжести треугольника** находится в точке пересечения медиан:

$$\begin{cases} m_C : 11x - 2y - 45 = 0, \\ m_B : -13x - 14y + 75 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = 4,33, y = 1,3, \quad O_3 (4,33; 1,3).$$

Решение [задачи 1](#)

Ответ: и) $x_{O_3} = 4,33;$
 $y_{O_3} = 1,33,$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Другой способ. Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины:

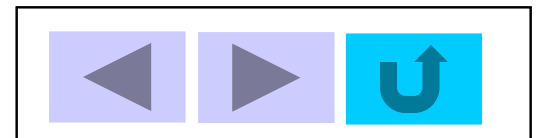
$$\lambda = \frac{CO_3}{C_3C_2} = \frac{2}{1}$$

$$x_{O_3} = \frac{x_C + 2x_{C_2}}{3} = \frac{5 + 2 \cdot 4}{3} = 4,33;$$

$$y_{O_3} = \frac{y_C + 2y_{C_2}}{3} = \frac{5 + 2 \cdot (-1/2)}{3} = 1,33.$$

Решение [задачи 1](#)

Ответ: и) $x_{O_3} = 4,33;$
 $y_{O_3} = 1,33,$



Прямая на плоскости.

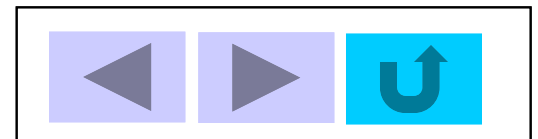
[Оглавление:](#)

к) **Внутренние углы** треугольника могут быть найдены через угловые коэффициенты прилежащих сторон:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A &= \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}} = \frac{1/2 - (-1/2)}{1 + 1/2 \cdot (-1/2)} = \frac{4}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle A &= \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Решение [задачи 1](#)

Ответ: $\angle A = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

л) Площадь треугольника:

$$1) S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30 \text{ (кв. ед.)}$$

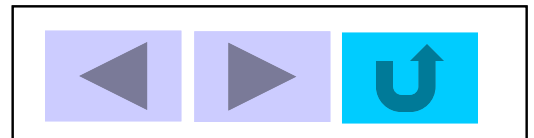
$$2) S_{\Delta} = p \cdot r,$$

p – полупериметр треугольника; r – радиус вписанной окружности,

$$p = \frac{3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}, \quad r = \sqrt{5} \Rightarrow S_{\Delta} = 30 \text{ (кв. ед.)}$$

Решение [задачи 1](#)

Ответ: л) 30



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

$A(3, 1)$ и $B(5, 2) \in AB$,

$$AB: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Уравнение перпендикуляра PM из точки $P(4, 9)$ на прямую AB :

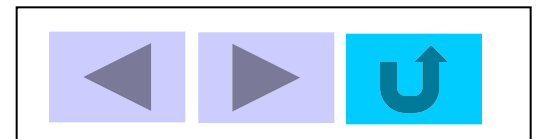
$$y - 9 = k(x - 4); \quad k \cdot \frac{1}{2} = -1 \rightarrow k = -2.$$

$$\begin{cases} AB: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \\ PM: y = -2x + 17, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 7, \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$M(x, y): (7, 3)$ - проекция P на AB .

Решение [задачи 2](#)

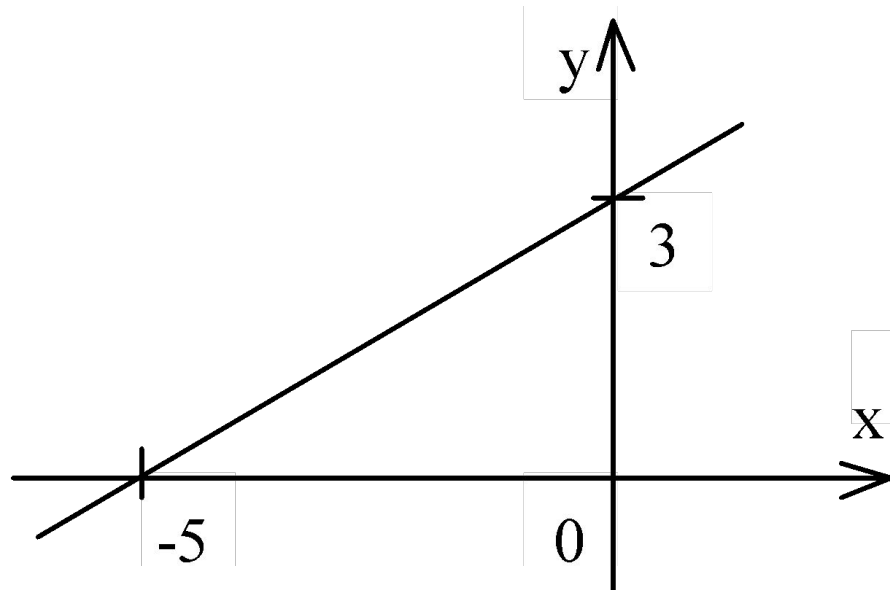
Ответ: $(7, 3)$



Прямая на плоскости.

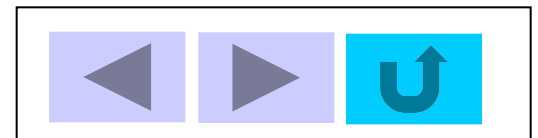
[Оглавление:](#)

Уравнение прямой в отрезках имеет вид: $\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1$, прямая отсекает на осях отрезки (-5) и 3.



Решение [задачи 3](#)

Ответ:



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Прямые

$$L_1: 2x + 3y - 5 = 0, \quad k_1 = \frac{2}{7},$$
$$L_2: 7x + 15y + 1 = 0, \quad k_2 = \frac{3}{15}$$

пересекаются, так как они имеют разные угловые коэффициенты. Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку их пересечения M :

$$2x + 3y - 5 + \lambda \cdot (7x + 15y + 1) = 0,$$
$$(2 + 7\lambda) \cdot x + (3 + 15\lambda) \cdot y + (-5 + \lambda) = 0$$

Выделим в этом пучке искомую прямую

$$L: y = kx + b$$

Решение [задачи 4](#)

Ответ: $5x + 12y + 6 = 0.$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

По условию искомая прямая перпендикулярна прямой

$$L_3: 12x - 5y - 1 = 0, \text{ для которой } k_3 = \frac{12}{5}$$

$$k = -\frac{1}{k_3}, \quad -\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda} = -\frac{5}{12} \Rightarrow$$

$\lambda = -1$ и уравнение искомой прямой:

$$5x + 12y + 6 = 0.$$

Решение [задачи 4](#)

Ответ: $5x + 12y + 6 = 0.$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

$$L_1: 2x + 3y + 4 = 0, y_1 = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow k_1 = -\frac{2}{3}.$$

$$L: y = k'x + b, k' = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\alpha = 45^\circ, \operatorname{tg}\alpha = \left| \frac{k' - k_1}{1 - k' \cdot k_1} \right| = \left| \frac{k' + 2/3}{1 - (2/3) \cdot k'} \right| = 1 \Rightarrow k'_{1,2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -5 \end{bmatrix}.$$

$$M(2,1) \in L, \quad L: \begin{cases} y = k'_1 x + b_1, \\ y = k'_2 x + b_2 \end{cases} \Rightarrow b_{1,2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 11 \end{bmatrix}.$$

$$L: \begin{cases} y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}, \\ y = -5x + 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y + 3 = 0, \\ 5x + y - 11 = 0. \end{cases}$$

Решение [задачи 5](#)

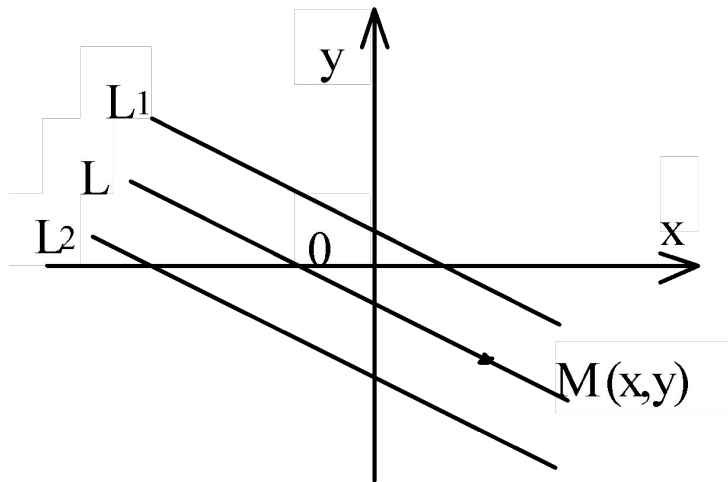
Ответ: $\begin{cases} x - 5y + 3 = 0, \\ 5x + y - 11 = 0 \end{cases}$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

1-ый способ.



Уравнение прямой L будем искать в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

В качестве нормального вектора $n = \{A, B\}$

можно выбрать нормальный вектор прямых $L_1: x + 2y - 1 = 0$ и $L_2: x + 2y - 1 = 0$, равный $\{1, 2\}$.

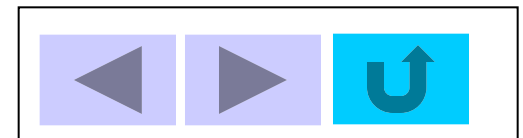
Найдем какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0) \in L$.

Точка M_0 будет делить пополам отрезок, соединяющий две любые точки, лежащие на L_1 и L_2 .

Например, (подбором!) $M_1(1, 0) \in L_1$ и $M_2(-2, 0) \in L_2$, тогда точка M_0 имеет координаты середины M_1M_2 $(-1/2, 0)$, и уравнение прямой L принимает вид: $x + 2y + 1/2 = 0$.

Решение [задачи 6](#)

Ответ: $x + 2y + 1/2 = 0$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

2 –ой способ.

Произвольная точка $M(x, y) \in L$, если
 $|\delta(M, L_1)| = |\delta(M, L_2)|$.

Для снятия модуля определим знаки отклонений точки $M(x, y)$ от прямых L_1 и L_2 . Для этого нужно выяснить взаимное расположение начала координат, точки $M(x, y)$ и прямых L_1 и L_2 .

Приведем уравнения прямых к нормальному виду:

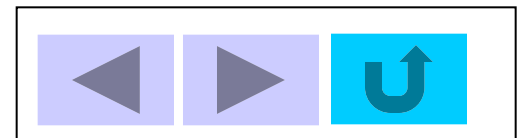
$$L_1: \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0, \quad \vec{n}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\},$$

$$L_2: -\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0, \quad \vec{n}_2 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\},$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ - единичные векторы нормалей к прямым L_1 и L_2 , проведенным **из начала координат**.

Решение [задачи 6](#)

Ответ: $x + 2y + 1/2 = 0$



Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

Видим, что $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ противоположны по направлению, значит, начало координат лежит в полосе между прямыми L_1 и L_2 . Точка M и начало координат лежат по одну сторону как от прямой L_1 , так и от прямой L_2 , значит, отклонения точки M от прямых L_1 и L_2 имеют один и тот же отрицательный знак.

Из $\left| \frac{x+2y-1}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{-x-2y-2}{\sqrt{5}} \right|$ следует, что

$$x+2y-1 = -x-2y-2 \quad \text{и} \quad x+2y+1/2=0.$$

Решение [задачи 6](#)

Ответ: $x+2y+1/2=0$



В результате студент должен уметь:

- 1. Решать задачи аналитической геометрии на плоскости
с помощью общего, канонических, параметрических,
нормального, «в отрезках»
уравнений прямой на плоскости.**
- 2. Изображать графически содержание задач.**

Перечень источников, список дополнительной литературы по теме.

1. Сборник задач по математике для вузов: В 4 ч. Ч. 1: Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Определители и матрицы системы линейных уравнений. Линейная алгебра. Основы общей алгебры / А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин, И. Б. Кожухов и др. / Под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2003. - 288 с.: ил.; 21 см. - ISBN 5-940520-34-0.
2. Клетеник, Давид Викторович. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для студентов вузов / Под ред. Н.В. Ефимова. - 15-е изд. - М.: Наука. Физматлит, 1998. - 223с. - ISBN 5-02-015080-0.
3. Данко, Павел Ефимович. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов: В 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М.: ОНИКС 21 век : Мир и образование, 2003. - 304с.: ил.; 22 см. - ISBN 5-329-00326-1.
4. Элементы аналитической геометрии и линейной алгебры: Сб. комплектов вариантов задач по курсу "Высшая математика". Ч. 1 / Урал. гос. техн. ин-т; Сост. О. А. Белослудцев, М. А. Вигура, Н. В. Кожевников, А. Ф. Рыбалко и др. ; Науч. ред. С. И. Машаров. - Екатеринбург: УГТУ, 1997. - 110 с. - ISBN 5-230-17046-8.