

Формирование базовых компетенций студентов технического университета

НОЦ 4

**М.А.Вигура, О.А.Кеда, А.Ф.Рыбалко,
Н.М.Рыбалко, А.Б.Соболев**

Математика

Поточная практика 6 Аналитическая геометрия в пространстве

**УГТУ-УПИ
2007г.**

Цель занятия:

- 1.** Овладеть соответствующим математическим аппаратом для дальнейшего изучения курса математики, демонстрировать и использовать математические методы в ходе изучения специальных дисциплин для будущей профессиональной деятельности.
- 2.** Осознать связь линейных уравнений с тремя неизвестными первой степени с образами плоскости и прямой в пространстве.

Формируемые компетенции по ФГОС:

ОНК1: способность и готовность использовать фундаментальные математические законы в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и теоретического исследования.

ИК1: способность использовать современные средства вычислительной техники, коммуникаций и связи.

ИК4: готовность работать с информацией из различных источников (сбор, обработка, анализ, систематизация, представление).

СЛК3: способность самостоятельно приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии.

Аналитическая геометрия в пространстве

- прямая линия в пространстве
- плоскость в пространстве
- взаимное расположение прямой и плоскости



1.Теоретическая

часть

2.Задачи

3.Решения задач

Оглавление



Формулы аналитической геометрии в пространстве:

[1.Плоскость в пространстве](#)

[2.Прямая в пространстве](#)

[3.Прямая и плоскость в
пространстве](#)

Аналитическая геометрия в пространстве

[Оглавление:](#)

Задача №:

<i>Плоскость</i>	<u>11</u>
<u>1</u>	
<u>2</u>	<u>12</u>
<u>3</u>	<u>13</u>
<u>4</u>	<u>14</u>
<u>5</u>	<i>Прямая и плоскость</i>
	<u>15</u>
<u>6</u>	<u>16</u>
<u>7</u>	<u>17</u>
<u>8</u>	<u>18</u>
<i>Прямая</i>	<u>19</u>
<u>9</u>	
<u>10</u>	<u>20</u>



Аналитическая геометрия в пространстве

[Оглавление:](#)

Решение задачи №:

Плоскость	<u>11</u>
<u>1</u>	
<u>2</u>	<u>12</u>
<u>3</u>	<u>13</u>
<u>4</u>	<u>14</u>
<u>5</u>	Прямая и плоскость
	<u>15</u>
<u>6</u>	<u>16</u>
<u>7</u>	<u>17</u>
<u>8</u>	<u>18</u>
Прямая	<u>19</u>
<u>9</u>	
<u>10</u>	<u>20</u>



1. Плоскость в пространстве

1. $Ax + By + Cz + D = 0$
 $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ - общее уравнение плоскости в декартовой системе координат;

2. $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через заданную точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярной вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$;



3.
$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \\ abc \neq 0 \end{cases}$$
 - уравнение плоскости, отсекающей на осях координат ox , oy , oz отрезки a , b и c соответственно;

4.
$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$
 - нормальное уравнение плоскости, где p – расстояние от начала координат до плоскости, а единичный вектор, перпендикулярный плоскости, имеет координаты $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$;



5. $\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$ - нормальный вид общего уравнения плоскости (знак нормирующего множителя противоположен знаку D);

6. $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ - расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости, заданной общим уравнением;



7.
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$
 - уравнение плоскости, проходящей

через три точки (x_i, y_i, z_i) ($i=1,2,3$), не лежащие на одной прямой;

8.
$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$
 - косинус острого угла φ

между плоскостями $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ ($i = 1, 2$);



9. $\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$ - необходимое и достаточное условие параллельности плоскостей $A_i x + B_i y + C_i z = 0 \quad (i = 1, 2)$;

10. $\boxed{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0}$ - необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей $A_i x + B_i y + C_i z = 0 \quad (i = 1, 2)$;

11. $\boxed{d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$ - расстояние между двумя параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$.

2. Прямая в пространстве

12. $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ - общее уравнение прямой как линии пересечения двух параллельных плоскостей;

13. $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ - канонические уравнения прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и имеющей направляющий вектор с компонентами $\{l, m, n\}$;



14.
$$\begin{cases} mx - ly + (ly_0 - mx_0) = 0 \\ ny - mz + (mz_0 - ny_0) = 0 \\ nx - lz + (lz_0 - nx_0) = 0 \end{cases}$$
 - уравнение прямой в виде проекций на координатные плоскости;

15.
$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$
 - параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и имеющей направляющий вектор с компонентами $\{l, m, n\}$;



16. $\begin{cases} l = B_1C_2 - B_2C_1 \\ m = C_1A_2 - C_2A_1 \\ n = A_1B_2 - A_2B_1 \end{cases}$ - соотношения между компонентами направляющего вектора прямой и координатами общего уравнения прямой;

17. $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ - канонические уравнения прямой, проходящей через точки с координатами (x_i, y_i, z_i) ($i=1,2$);

18. $\cos \varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$ - косинус острого угла φ

между прямыми $\frac{x-x_0}{l_i} = \frac{y-y_0}{m_i} = \frac{z-z_0}{n_i}$ ($i=1,2$), проходящими
через точку (x_0, y_0, z_0) ;

19. $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ - условие параллельности двух прямых;

20. $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ - условие перпендикулярности двух
прямых;



21.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

- прямые $L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ и

$$L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

лежат в одной плоскости



3. Прямая и плоскость в пространстве

22. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ – уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую, заданную общим уравнением $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = x_0 + lt_1 \\ y = y_0 + mt_1 \\ z = z_0 + nt_1 \end{cases}$ где $t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$ – координаты точки пересечения прямой

$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$;



24. $\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$ - синус острого угла

между прямой $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

25. $|Al + Bm + Cn| = 0$ - условие перпендикулярности прямой

$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$;

26. $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ - условие параллельности прямой

$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.



Составьте уравнение плоскости P , проходящей через точку M_0 :

- 1.1) параллельно плоскости P_1 ;
- 1.2) перпендикулярно прямой L ;
- 1.3) перпендикулярно двум плоскостям P_1 и P_2 .

Задача 1

Ответ: $2x - 3z - 27 = 0$

[Решение:](#)



Составьте уравнение плоскости P , проходящей через три данные точки:

$$M_1(3, -1, 2), M_2(4, -1, -1), M_3(2, 0, 2).$$

Задача 2

Ответ: $3x + 3y + z - 8 = 0.$

[Решение:](#)



3.1 Найдите отрезки, отсекаемые плоскостью $3x - 4y - 24z + 12 = 0$ на координатных осях.

3.2 Составьте уравнение плоскости P , параллельной вектору $\vec{p} = \{2, 1, -1\}$ и отсекающей на координатных осях отрезки $a = 3$ и $b = -2$.

3.3 Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, 7, -5)$ и отсекающей от осей координат положительные и равные отрезки.

Задача 3

Ответ: 1) -4, 3, 0, 5

2) $2x - 3y + z = 6$

3) $x + y + z - 3 = 0$

[Решение:](#)



Найдите угол между плоскостями

$$P_1 : x - y - \sqrt{2}z - 6 = 0 \text{ и } P_2 : y = 0.$$

Задача 4

Ответ: 60°

[Решение:](#)



Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2, -1, 4)$ и $N(3, 2, -1)$ перпендикулярно к плоскости $P_1: x + y + z - 3 = 0$.

Задача 5

Ответ: $4x - 3y - z - 7 = 0$.

[Решение:](#)



Приведите уравнение плоскости $2x - y + 2z + 3 = 0$ к нормальному виду, объясните смысл коэффициентов при неизвестных и постройте плоскость.

Задача 6

Ответ: $2x - y + 2z + 3 = 0$.

[Решение:](#)



Найдите расстояние от заданной точки
 $M_0(-2, -4, 3)$ до плоскости $2x - y + 2z + 3 = 0$.

Задача 7

Ответ: 3

[Решение:](#)



Составьте уравнения плоскостей, которые делят пополам двугранные углы, образованные двумя пересекающимися плоскостями:

$$P_1 : x - 3y + 2z - 5 = 0 \quad \text{и} \quad P_2 : 3x - 2y - z + 3 = 0.$$

Задача 8

Ответ: $4x - 5y + z - 2 = 0, 2x + y - 3z + 8 = 0.$

[Решение:](#)



Прямая L задана общими уравнениями

$$L: \begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

Напишите канонические уравнения этой прямой и её уравнения в виде проекций на координатные плоскости.

Задача 9

Ответ: $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{-3}$ $\begin{cases} 3x - z + 2 = 0, \\ 2x - y + 2 = 0, \\ 3y - 2z - 2 = 0. \end{cases}$

[Решение:](#)



1) Докажите параллельность прямых

$$L_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$$

2) Определите угол между прямыми

$$L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

Задача 10

Ответ: 2) $\varphi = \arccos \frac{1}{3}.$

[Решение:](#)



Найдите уравнения прямой, проходящей через точку $M(3, 2, -1)$ и пересекающей ось OX под прямым углом.

Задача 11

Ответ: $\frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}.$

[Решение:](#)



1) Составьте параметрические уравнения прямой L , проходящей через точку $M_0(2,0,-3)$ параллельно прямой

$$L_1: \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

2) Напишите канонические уравнения прямой L , проходящей через точку $M_0(2,0,-3)$ параллельно прямой

$$L_1: \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

Задача 12

Ответ: 1) $x = 5t + 2, \quad y = 2t, \quad z = -t - 3.$

$$2) \frac{x-2}{-4} = \frac{y}{8} = \frac{z+3}{10}.$$

[Решение:](#)



Определите, при каком значении l прямые

$$L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

пересекаются.

Задача 13

Ответ: $l = 3$.

[Решение:](#)



Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,1,1)$, пересекающей прямую

$$L_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{и перпендикулярную прямой}$$

$$L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}.$$

Задача 14

Ответ: $\frac{x-1}{9} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-5}.$

[Решение:](#)



Найдите точку пересечения

прямой

и плоскости

$$L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$$

$$P: 2x + 3y + z - 1 = 0.$$

Задача 15

Ответ: $x = 2, \quad y = -3, \quad z = 6.$

[Решение:](#)



1) Составьте уравнение плоскости P , проходящей через данную прямую L и точку $M_0(2, -2, 1)$, если прямая

$$L : \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -3t + 2, \\ z = 2t - 3, \end{cases}$$

задана параметрическими уравнениями.

Задача 16

Ответ: 1) $4x + 6y + 5z - 1 = 0$.

[Решение:](#)



2) Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$L_1 : \begin{cases} 3x + 2y + 5z + 6 = 0, \\ x + 4y + 3z + 4 = 0, \end{cases}$$

параллельно прямой

$$L_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3}.$$

Задача 16

Ответ: 2) $2x + 3y + 4z + 5 = 0$

[Решение:](#)



3) Составьте уравнение плоскости P , проходящей через прямую

$$L: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$$

перпендикулярно к плоскости

$$P_1: x + y - z + 1 = 0, \quad L \notin P.$$

Задача 16

Ответ: 3) $3x - y + 2z - 1 = 0$.

[Решение:](#)



1) Найдите уравнения проекции прямой

$$L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$$

на плоскость

$$P: x + y + 2z - 5 = 0.$$

Задача 17

Ответ: 1) $L_{np}: \begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0 \\ x + y - z = 0, \end{cases}$

[Решение:](#)



2) Найдите проекцию точки
 $M(5, 2, -1)$

на плоскость

$$P: 2x - y + 3z + 23 = 0.$$

Задача 17

Ответ: 2) $x_{np} = 1, \quad y_{np} = 4, \quad z_{np} = -7.$

[Решение:](#)



3) Найдите проекцию точки

$$M(0,1,2)$$

на прямую

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}, \quad M \notin L.$$

Задача 17

Ответ: 3) $O\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -1\right)$.

[Решение:](#)



4) Найдите расстояние от точки
 $M(0,1,2)$
до прямой

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}.$$

Задача 17

Ответ: 4) $\frac{\sqrt{270}}{5}$.

[Решение:](#)



5) Напишите уравнение перпендикуляра L_1 из точки $M(0,1,2)$

на прямую

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}.$$

Задача 17

Ответ: 3) $O\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -1\right).$

Решение:



6) Найдите точку N , симметричную точке $M(0,1,2)$ относительно прямой

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}.$$

Задача 17

Ответ: 6) $N\left(\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}, -4\right).$

[Решение:](#)



1) Найдите расстояние от точки $M(1,1,1)$ до плоскости $P: x + y - 2z - 6 = 0$.

2) Найдите координаты точки N , симметричной точке $M(1,1,1)$ относительно плоскости $P: x + y - 2z - 6 = 0$.

Задача 18

Ответ: 1) $\sqrt{6}$
2) $N(3,3,-3)$.

[Решение:](#)



Определите расстояние между параллельными
прямыми

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

Задача 19

Ответ: 3

[Решение:](#)



1) Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми

$$L_1: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

2) Напишите уравнения общего перпендикуляра L к прямым L_1 и L_2 .

Задача 20

Ответ: 1) $d = \frac{12}{\sqrt{21}}$. 2) $L: \begin{cases} x-10y+2z+14=0, \\ 3x-2y-z+3=0. \end{cases}$

[Решение:](#)



Аналитическая геометрия в пространстве (плоскость)

[Оглавление:](#)

Решение 1.1

Искомая плоскость $P: A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$.

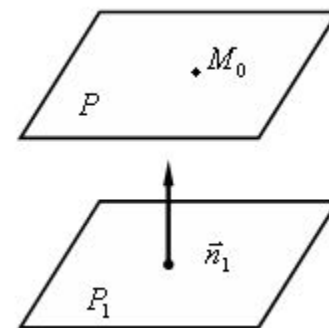
$$\begin{cases} M_0(3, -2, -7) \in P \\ P \parallel P_1 \end{cases}.$$

$$P_1: 2x - 3z + 5 = 0, \quad \vec{n}_1 = \{2, 0, -3\} = \vec{n}.$$

$$P: 2(x-3) - 3(z+7) = 0,$$

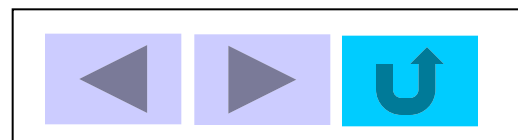
после приведения к виду общего уравнения плоскости принимает вид:

$$P: 2x - 3z - 27 = 0.$$



Решение [задачи 1](#)

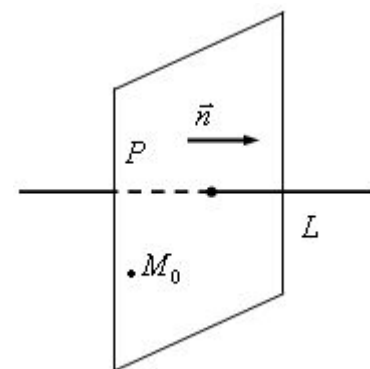
Ответ: $2x - 3z - 27 = 0$



Решение 1.2

$$M_0(1,1,1), \quad L: \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

$$\begin{cases} M_0(3,-2,-7) \in P \\ L \perp P \end{cases}$$
$$\vec{n} = \vec{a} = \{5, 2, -1\}$$



$$P: 5(x-1) + 2(y-1) - (z-1) = 0 \rightarrow 5x + 2y - z - 6 = 0.$$

Решение [задачи 1](#)

Ответ: $5x + 2y - z - 6 = 0$



Аналитическая геометрия в пространстве (плоскость)

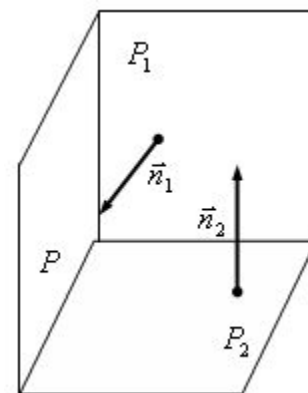
[Оглавление:](#)

Решение 1.3

$$M_0(1,1,-1),$$

$$P_1: 2x - y + 5z + 3 = 0, \quad \vec{n}_1 = \{2, -1, 5\}; \quad P_2: x + 3y - z - 7 = 0, \quad \vec{n}_2 = \{1, 3, -1\}.$$

$$\begin{cases} M_0 \in P \\ P \perp P_1 \\ P \perp P_2 \end{cases} \quad \begin{cases} n \perp n_1 \\ n \perp n_2 \end{cases}$$
$$\vec{n} = [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -14\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k}.$$



$$P: -14(x-1) + 7(y-1) + 7(z+1) = 0 \Rightarrow 2x - y - z - 2 = 0.$$

Решение [задачи 1](#)

Ответ: $2x - y - z - 2 = 0$



$$\left\{ \begin{array}{l} M(x, y, z) \in P \\ \overline{MM_1} \in P \\ \overline{MM_2} \in P \\ \overline{M_1M_3} \in P \end{array} \right.$$

$$P: \overline{MM_1} \cdot \overline{MM_2} \cdot \overline{M_1M_3} = \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 3y + z - 8 = 0.$$

Решение [задачи 2](#)

Ответ: $3x + 3y + z - 8 = 0.$



Решение 3.1

$$P: 3x - 4y - 24z + 12 = 0$$

Приведем уравнение плоскости к виду уравнения плоскости "в отрезках":

$$\frac{3x}{-12} - \frac{4y}{-12} - \frac{24z}{-12} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-4} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{1/2} = 1,$$

где $a = -4$, $b = 3$, $c = \frac{1}{2}$ – отрезки,

отсекаемые плоскостью на осях Ox , Oy , Oz соответственно.

Решение [задачи 3](#)

Ответ: -4, 3, 0,5.



Решение 3.2

Уравнение плоскости "в отрезках":

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{c} = 1.$$

$$P: -2cx + 3cy - 6z + 6c = 0, \quad \vec{n} = \{-2c, 3c, -6\}.$$

$$(\vec{n} \cdot \vec{p}) = -4c + 3c + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$c = 6, \quad \vec{n} = \{2, -3, 1\}$$

$$P: \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{6} = 1 \Rightarrow 2x - 3y + z = 6.$$

Решение [задачи 3](#)

Ответ: $2x - 3y + z = 6$



$$P: \frac{x + y + z}{a} = 1.$$

$$M_0(1, 7, -5) \in P \Rightarrow a = 1 + 7 - 5 = 3$$

$$P: x + y + z = 3 \Rightarrow x + y + z - 3 = 0.$$

Решение [задачи 3](#)

Ответ: $x + y + z - 3 = 0$



Один из двух смежных углов (острый) между плоскостями равен углу между их нормальными векторами $\vec{n}_1 = \{1, -1, -\sqrt{2}\}$ и $\vec{n}_2 = \{0, 1, 0\}$ и находится из их скалярного произведения:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \left| -\frac{1}{2} \right| \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Решение [задачи 4](#)

Ответ: 60° .



Аналитическая геометрия в пространстве (плоскость)

[Оглавление:](#)

$\vec{n} = \{A, B, C\}$ - нормальный вектор искомой плоскости P ,

$\vec{n}_1 = \{1, 1, 1\}$ - нормальный вектор $P_1 \perp P$.

$$\begin{cases} M(2, 1, 4) \in P \\ N(3, 2, -1) \in P \\ \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A(x-2) + B(y+1) + C(z-4) = 0, \\ A + 3B - 5C = 0, \\ A + B + C = 0. \end{cases}$$

- система для определения A, B, C

Условие существования решения системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad P: 4x - 3y - z - 7 = 0.$$

Решение [задачи 5](#)

Ответ: $4x - 3y - z - 7 = 0$.



$$P: 2x - y + 2z + 3 = 0, \quad \mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\frac{1}{3},$$

$$P: -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 1 = 0$$

В нормальном уравнении $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ коэффициенты представляют собой направляющие косинусы единичного вектора нормали к плоскости, которая проходит через начало координат и отстоит от него на расстоянии p .

Решение [задачи 6](#)

Ответ: $2x - y + 2z + 3 = 0$.



Расстояние от точки $M_0(-2, -4, 3)$ до плоскости $2x - y + 2z + 3 = 0$:

$$d = |\delta| = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{2(-2) - (-4) + 2 \cdot 3 + 3}{-\sqrt{4 + 1 + 4}} \right| = 3,$$

$\delta < 0$, то есть начало координат и точка M_0 находятся по одну сторону от плоскости.

Решение [задачи 7](#)

Ответ: 3.



Уравнение плоскостей найдем из условия равенства отклонений точки этой плоскости $M(x, y, z)$ от двух данных плоскостей $P_1: x - 3y + 2z - 5 = 0$ и $P_2: 3x - 2y - z + 3 = 0$:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \text{ что дает}$$

$$1) \delta_1 = \delta_2: \frac{x - 3y + 2z - 5}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{3x - 2y - z + 3}{-\sqrt{9 + 4 + 1}} \Rightarrow P_3: 4x - 5y + z - 2 = 0,$$

$$2) \delta_1 = -\delta_2: \frac{x - 3y + 2z - 5}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{3x - 2y - z + 3}{\sqrt{9 + 4 + 1}} \Rightarrow P_4: 2x + y - 3z + 8 = 0.$$

Решение [задачи 8](#)

Ответ:
 $4x - 5y + z - 2 = 0,$
 $2x + y - 3z + 8 = 0.$



Аналитическая геометрия в пространстве (прямая)

[Оглавление:](#)

$$L: \begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

1-й способ

Подбором найдем $M_0(0,2,2) \in L$.
 $\vec{n}_1 = \{1, 1, -1\}$, $\vec{n}_2 = \{2, -1, 0\}$, $\vec{a} = [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] \perp \vec{n}_1, \perp \vec{n}_2$,

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \{-1, -2, -3\},$$

$$L: \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{-3} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x - z + 2 = 0, \\ 2x - y + 2 = 0, \\ 3y - 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Решение [задачи 9](#)

Ответ: $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{-3} \quad \begin{cases} 3x - z + 2 = 0, \\ 2x - y + 2 = 0, \\ 3y - 2z - 2 = 0. \end{cases}$



2-й способ

$$L: \begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{z}{3} - \frac{2}{3}, \\ y = \frac{2z}{3} - \frac{2}{3} \end{cases} - \text{уравнения}$$

прямой в проекциях на плоскости XOZ и YOZ .

$$\begin{cases} z = 3x + 2, \\ z = \frac{3y + 2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3x + 2}{1} = \frac{3y + 2}{2} = \frac{z}{1}.$$

Решение [задачи 9](#)

Ответ: $\frac{3x + 2}{1} = \frac{3y + 2}{2} = \frac{z}{1}.$



1)

$$L_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}, \quad L_2: \begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$$

$$L_1: \vec{a} = \{3, -2, 1\}.$$

$$L_2: \vec{a}_2 = [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \{-6, 4, -2\}.$$

Прямые L_1 и L_2 параллельны, так как компоненты их направляющих векторов пропорциональны:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = -\frac{1}{2}.$$

Решение [задачи 10](#)

Ответ:



2)

$$L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad L_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

$$\cos \varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} = \frac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Решение [задачи 10](#)

Ответ: $\varphi = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$



$$\begin{cases} M_1(3, 2, -1) \in L, \\ M_2(3, 0, 0) \in L. \end{cases}$$

$$L: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \Rightarrow$$

$$\frac{x - 3}{0} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z + 1}{1}.$$

Решение [задачи 11](#)

Ответ: $\frac{x - 3}{0} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z + 1}{1}.$



1)

$$M_0(2, 0, -3) \in L, \quad L \parallel L_1,$$

$$L_1: \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

$$L: \vec{a} = \vec{a}_1 = \{5, 2, -1\};$$

$$L: \frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1} = t \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5t + 2, \\ y = 2t, \\ z = -t - 3. \end{cases}$$

Решение [задачи 12](#)

Ответ: $x = 5t + 2, \quad y = 2t, \quad z = -t - 3.$



2)

$$M_0(2,0,-3) \in L, \quad L \parallel L_1,$$

$$L_1: \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

$$L: \vec{a} = [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \{-4, 8, 10\} \Rightarrow$$

$$L: \frac{x-2}{-4} = \frac{y}{8} = \frac{z+3}{10}.$$

Решение [задачи 12](#)

Ответ: $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{8} = \frac{z+3}{10}.$



$$M_1(-2,0,1) \in L_1, M_2(3,1,7) \in L_2.$$

Прямые пересекаются, если векторы $\overrightarrow{M_2M_1}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ компланарны:

$$\overrightarrow{M_2M_1} \cdot \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то есть $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \\ l & 4 & 2 \end{vmatrix} = 22l - 66 = 0,$ откуда $l = 3$.

Решение [задачи 13](#)

Ответ: $l = 3$.



Аналитическая геометрия в пространстве (прямая)

[Оглавление:](#)

$M(1,1,1) \in L$, $M_1(0,0,0) \in L_1$, L пересекает $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$,

$L \perp L_2$, $L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$, $L: \frac{x-1}{l} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-1}{n}$.

$$\overrightarrow{M_2M_1} \cdot \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ l & m & n \end{vmatrix} = l - 2m + n = 0.$$

$L_2: \vec{a}_2 = \{2, 1, 4\}$, $(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2) = 0 \Leftrightarrow 2l + m + 4n = 0$.

$$\begin{cases} l - 2m + n = 0, \\ 2l + m + 4n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{2}{5}n, \quad l = -\frac{9}{5}n, \quad l:m:n = 9:2:(-5)$$

$$L: \frac{x-1}{9} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-5}.$$

Решение [задачи 14](#)

Ответ: $\frac{x-1}{9} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-5}$.



$$L : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} \Rightarrow \begin{cases} x-1=t, \\ y+1=-2t, \\ z=6t. \end{cases}$$

$$P : 2x + 3y + z - 1 = 0.$$

$$2(t+1) + 3(-2t-1) + 6t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1,$$

$$x = 2, \quad y = -3, \quad z = 6.$$

Решение [задачи 15](#)

Ответ: $x = 2, \quad y = -3, \quad z = 6.$



Аналитическая геометрия в пространстве (прямая и плоскость) [Оглавление:](#)

1)

$$L \in P, \quad L: x = 2t + 1, \quad y = -3t + 2, \quad z = 2t - 3.$$

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{2} \Rightarrow \begin{cases} -3(x-1) = 2(y-2) \\ 2(x-1) = 2(z+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0 \\ x - z - 4 = 0. \end{cases}$$

Уравнение пучка плоскостей через прямую L имеет вид:

$$(x(3-z-24)+7) + y(1-3z) \Leftrightarrow 2\lambda + x(4-7z) + z \cdot 0 =$$

$$M_0(2, -2, 1) \in P: 2 + 4\lambda - 1 - 4 - 7\lambda - 0 = \lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{5},$$

$$P: 4x + 6y + 5z - 1 = 0.$$

Решение [задачи 16](#)

Ответ: 1) $4x + 6y + 5z - 1 = 0$.



2) Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую

$$L_1: \begin{cases} 3x + 2y + 5z + 6 = 0, \\ x + 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda(x + 4y + 3z + 4) + \mu(3x + 2y + 5z + 6) = 0 \Leftrightarrow$$

имеет вид: $\Leftrightarrow (3 + \lambda)x + (2 + 4\lambda)y + (5 + 3\lambda)z + (6 + 4\lambda) = 0$.

$$P: \vec{n} = \{3 + \lambda, 2 + 4\lambda, 5 + 3\lambda\}, \quad P \parallel L_2, \quad L_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3},$$

$$\vec{a}_2 = \{3, 2, -3\}, \quad \vec{n} \perp \vec{a}_2, \quad (\vec{n} \cdot \vec{a}_2) = 0:$$

$$3(3 + \lambda) + 2(2 + 4\lambda) - 3(5 + 3\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1,$$

$$P: 2x + 3y + 4z + 5 = 0.$$

Решение задачи 16

Ответ: 2) $2x + 3y + 4z + 5 = 0$



3) Уравнение прямой L в проекциях:
$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ y - 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую L , имеет вид:

$$(2x - 2) + 2(y - 2z - 2) = \lambda \Leftrightarrow 2\lambda x + 2(\lambda - 1)y - 4\lambda = 0$$

с общим нормальным вектором $\vec{n} = \{2, 2\lambda\}$, зависящим от параметра λ .

Условие перпендикулярности искомой плоскости и плоскости P_1 с $\vec{n}_1 = \{1, 1, -1\}$ имеет вид:

$$(\vec{n} \cdot \vec{n}_1) = 0 + \dots = 0, \quad \lambda = -\frac{2}{3}$$

$$P: 3x - y + 2z - 1 = 0.$$

Решение [задачи 16](#)

Ответ: $3x - y + 2z - 1 = 0.$



$$1) L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 3 = 0, \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Уравнение пучка плоскостей через прямую L :

$$(2x - y - 3) + \lambda(x - (2 - 3\lambda) - 0) = 0 \Leftrightarrow \lambda + 3(1 - \lambda) - 0 = 0$$

$$P_1 \perp P, \quad \vec{n}_1 = (2 + 3\lambda, -1, -), \quad P: x + y + 2z - 5 = 0, \quad \vec{n} = \{1, 1, 2\};$$

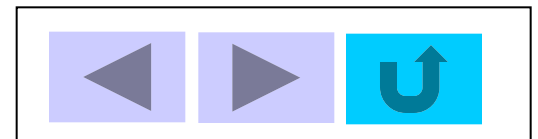
$$(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}) = 0 \Rightarrow (2 + 3\lambda) + 0 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$$

$$P_1: x + y - z = 0.$$

$$L_{np}: \begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0, \\ x + y - z = 0, \end{cases} \Rightarrow L_{np}: \frac{x}{1} = \frac{y - \frac{5}{3}}{-1} = \frac{z - \frac{5}{3}}{0}.$$

Решение задачи 17

Ответ: 1) $L_{np}: \frac{x}{1} = \frac{y - \frac{5}{3}}{-1} = \frac{z - \frac{5}{3}}{0}.$



2)

Проекцией точки $M(5, 2, -1)$ на плоскость

$P: 2x - y + 3z + 23 = 0$ будет точка пересечения прямой L , проходящей через точку M перпендикулярно к плоскости P .
Уравнение перпендикуляра через точку M будет иметь вид:

$$L: \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3} = t \quad \text{и координаты проекции } M_{\text{пр}}$$

найдем, подставив

$x = 2t + 5, \quad y = -t + 2, \quad z = 3t - 1$ в уравнение плоскости P :

$$2(2t + 5) + t - 2 + 3(3t - 1) + 23 = 0, \quad \text{откуда } t = -2 \quad \text{и}$$

$$x_{\text{пр}} = 1, \quad y_{\text{пр}} = 4, \quad z_{\text{пр}} = -7.$$

Решение [задачи 17](#)

Ответ: 2) $x_{\text{пр}} = 1, \quad y_{\text{пр}} = 4, \quad z_{\text{пр}} = -7.$

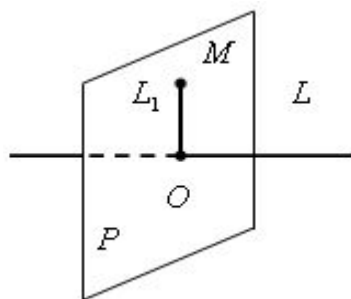


3) Уравнение плоскости P , перпендикулярной к прямой

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}, \quad M \notin L \text{ и проходящей}$$

через точку $M(0,1,2)$, имеет вид:

$$2x + 1(y - 1) + 0(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0.$$



Точка пересечения P и L

$$O(x, y, z): \quad x-1=2t, \quad y=t, \quad z=-1,$$

$$2(2t+1) + t - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{5}$$

$$O\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -1\right).$$

Решение [задачи 17](#)

Ответ: 3) $O\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -1\right).$



4)

Расстояние от $M(0,1,2)$ до прямой $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ равно расстоянию от M до проекции M на L – точки $O\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -1\right)$, координаты которой найдены в пункте 3):

$$d = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{5}\right)^2 + (2+1)^2} = \frac{\sqrt{270}}{5}.$$

Решение [задачи 17](#)

Ответ: 4) $\frac{\sqrt{270}}{5}$



5)

Из 4) уравнение перпендикуляра L_1 из точки $M(0,1,2)$ на прямую $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ запишем как уравнение прямой, проходящей через точку $M(0,1,2)$ и ее проекцию на L – точку $O\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -1\right)$.

$$L_1: \frac{x-0}{\frac{3}{5}-0} = \frac{y-1}{-\frac{1}{5}-1} = \frac{z-2}{-1-2}, \quad \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{5}.$$

Решение [задачи 17](#)

Ответ: $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{5}$



6) Для того чтобы найти координаты точки N , симметричной точке $M(0,1,2)$ относительно прямой

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0},$$

заметим, что точка O делит отрезок MN пополам и

$$x_0 = \frac{x_M + x_N}{2}, \quad y_0 = \frac{y_M + y_N}{2}, \quad z_0 = \frac{z_M + z_N}{2},$$

$$x_N = \frac{6}{5}, \quad y_N = -\frac{7}{5}, \quad z_N = -4.$$

$$N\left(\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}, -4\right).$$

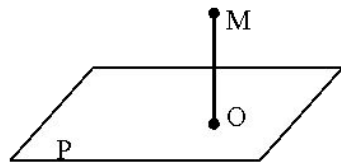
Решение [задачи 17](#)

Ответ: $N\left(\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}, -4\right)$



Аналитическая геометрия в пространстве (прямая и плоскость) [Оглавление:](#)

1) $M(1,1,1)$, $P: x + y - 2z - 6 = 0$. $\rho(M, P) = ?$



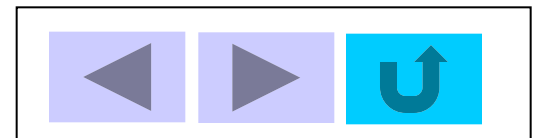
$$L: \begin{cases} M(1,1,1) \in L \\ P \perp L \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

Проекцию точки M на плоскость P находим как точку пересечения прямой $L: x = t + 1, y = t + 1, z = -2t + 1$ и плоскости $P: t + 1 + t + 1 - 2(-2t + 1) - 6 = 0$, откуда и $t = 2$, $x = 3, y = 3, z = -3$.

$$\rho = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{6}.$$

Решение [задачи 18](#)

Ответ: 1) $\sqrt{6}$



2)

Координаты точки N , симметричной точке $M(1,1,1)$ относительно плоскости $P: x + y - 2z - 6 = 0$ найдем, зная координаты точки $O(2,2,-1)$ - середины отрезка MN из 1) :

$$x_0 = \frac{x_M + x_N}{2} \Rightarrow x_N = 3, \quad y_N = 3, \quad z_N = -3.$$

$$N(3,3,-3).$$

Решение [задачи 18](#)

Ответ: 2) $N(3,3,-3)$.



$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2} \parallel L_2: \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}. \rho(L_1, L_2) = ?$$

1-ый способ. Проекцию точки $M_1(2, -1, 0) \in L_1$ на прямую L_2 найдем как точку пересечения прямой $L_2: x = 3t + 7, y = 4t + 1, z = 2t + 3$ и плоскости

$$P: (P \perp L_1, P \perp L_2, M_1 \in P), \quad \vec{n} = \vec{a} :$$

$$3(x-2) + 4(y+1) + 2z = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + 2z - 2 = 0,$$

$$3(3t+7) + 4(4t+1) + 2(2t+3) - 2 = 0 \Leftrightarrow 29t + 29 = 0,$$

$$t = -1 \Rightarrow O = (4, -3, 1).$$

$$\rho(L_1, L_2) = \rho(M_1, O) = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

Решение [задачи 19](#)

Ответ: 3



2-ой способ. Точки $M_1(2, -1, 0) \in L_1$, $M_2(7, 1, 3) \in L_2$; $\vec{a} = \{3, 4, 2\}$ - направляющий вектор обеих прямых.

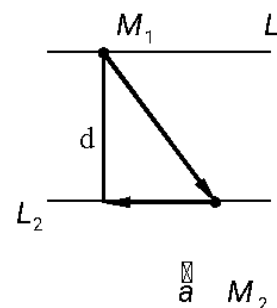
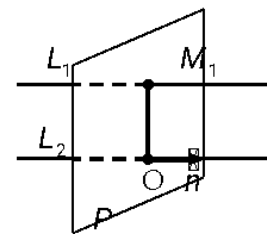
$$d^2 + |\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{M_1 M_2}|^2$$

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{M_1 M_2}|^2 - |\text{пр}_{\vec{a}} \overrightarrow{M_1 M_2}|^2}.$$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \{5, 2, 3\}, |\overrightarrow{M_1 M_2}|^2 = 25 + 4 + 9 = 38.$$

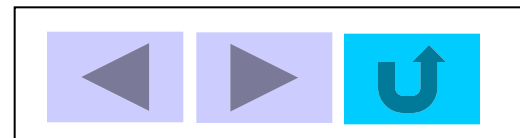
$$\text{пр}_{\vec{a}} \overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{(\vec{a} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2})}{|\vec{a}|} = \frac{15 + 8 + 6}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29},$$

$$(\text{пр}_{\vec{a}} \overrightarrow{M_1 M_2})^2 = 29, \quad d = \sqrt{38 - 29} = 3.$$



Решение задачи 19

Ответ: 3

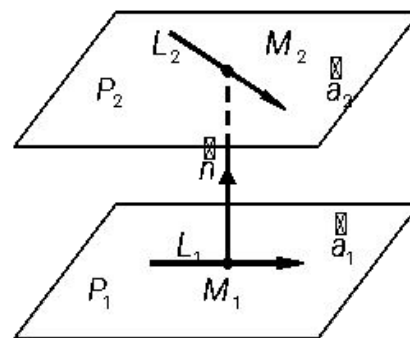


$$L_1: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

скрещивающиеся прямые. $\rho(L_1, L_2) = ?$

1) 1-ый способ. Уравнение плоскости P_1 , проходящей через прямую L_1 параллельно прямой L_2 , запишем как уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(0,1,-2)$ с нормальным вектором

$$\vec{n} = [\vec{a}_1 \times \vec{a}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \{-2, -1, -4\}$$



Решение [задачи 20](#)

Ответ: $\frac{12}{\sqrt{21}}$



$$-2x - (y - 1) - 4(z + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 4z + 7 = 0.$$

Расстояние от точки $M_2(-1, -1, 2)$, принадлежащей прямой L_2 , до плоскости P_1 найдем, приведя уравнение P_1 к нормальному виду:

$$-\frac{2}{\sqrt{21}}x - \frac{1}{\sqrt{21}}y - \frac{4}{\sqrt{21}}z - \frac{7}{\sqrt{21}} = 0,$$

$$d = \left| \frac{2}{\sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{21}} - \frac{8}{\sqrt{21}} - \frac{7}{\sqrt{21}} \right| = \frac{12}{\sqrt{21}}.$$

Решение [задачи 20](#)

Ответ: $\frac{12}{\sqrt{21}}$



2-ой способ.

$$\rho(P_1, P_2) = ? \quad P_1 \parallel P_2, \quad \begin{cases} L_1 \in P_1 \\ L_2 \in P_2 \end{cases}$$

$$d = \left| \text{пр}_{[a_1 \times a_2]} \overrightarrow{M_1 M_2} \right| = \frac{(\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2})}{|\vec{n}|}.$$

$$\vec{n} = (-1, -2, 4), \quad |\vec{n}| = \sqrt{21},$$

$$(\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}) = 2 + 2 - 16 = -12, \quad d = \frac{12}{\sqrt{21}}.$$

Решение [задачи 20](#)

Ответ: $\frac{12}{\sqrt{21}}$



Аналитическая геометрия в пространстве (прямая и плоскость) [Оглавление:](#)

2) Рассмотрим плоскости P_3 и P_4 , $\begin{cases} L_1 \in P_3 \\ L_2 \in P_4 \end{cases}$, $\begin{cases} P_1 \in P_3 \\ P_1 \in P_4 \end{cases}$, P_1 из 1).

$$M_1(0,1,-2) \in P_3, \quad \vec{n}_3 = [\vec{a}_1 \times \vec{n}] = \{1, -10, 2\} \perp P_3,$$

откуда $P_3: x - 10y + 2z + 14 = 0$.

Аналогично

$$M_2(-1,-1,2) \in P_4, \quad \vec{n}_4 = [\vec{a}_2 \times \vec{n}] = \{-9, 6, 3\} \perp P_4 \quad \text{и}$$

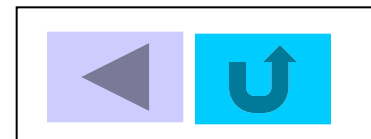
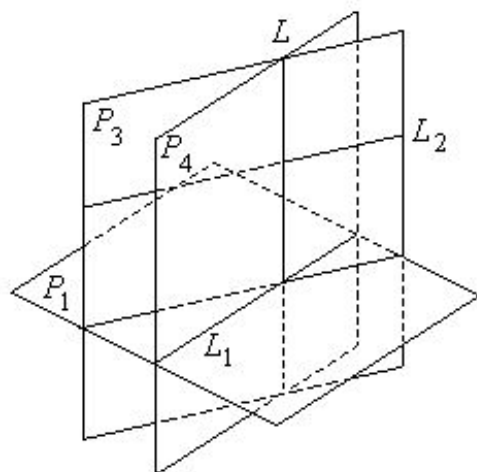
$$P_4: 3x - 2y - z + 3 = 0.$$

Общим перпендикуляром к прямым L_1 и L_2 является прямая L , являющаяся линией пересечения плоскостей P_3 и P_4 , которую можно записать общими уравнениями:

$$L: \begin{cases} x - 10y + 2z + 14 = 0, \\ 3x - 2y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение [задачи 20](#)

Ответ: $L: \begin{cases} x - 10y + 2z + 14 = 0, \\ 3x - 2y - z + 3 = 0. \end{cases}$



**В результате студент должен уметь использовать
во всех последующих применениях математическое описание**

1) плоскости в пространстве,

2) прямой в пространстве,

3) взаимного расположения плоскости и прямой.

Перечень источников, список дополнительной литературы по теме.

1. Сборник задач по математике для вузов: В 4 ч. Ч. 1: Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Определители и матрицы системы линейных уравнений. Линейная алгебра. Основы общей алгебры / А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин, И. Б. Кожухов и др. / Под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2003. - 288 с.: ил.; 21 см. - ISBN 5-940520-34-0.
2. Клетеник, Давид Викторович. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для студентов вузов / Под ред. Н.В. Ефимова. - 15-е изд. - М.: Наука. Физматлит, 1998. - 223с. - ISBN 5-02-015080-0.
3. Данко, Павел Ефимович. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов: В 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М.: ОНИКС 21 век : Мир и образование, 2003. - 304с.: ил.; 22 см. - ISBN 5-329-00326-1.
4. Элементы аналитической геометрии и линейной алгебры: Сб. комплектов вариантов задач по курсу "Высшая математика". Ч. 1 / Урал. гос. техн. ин-т; Сост. О. А. Белослудцев, М. А. Вигура, Н. В. Кожевников, А. Ф. Рыбалко и др. ; Науч. ред. С. И. Машаров. - Екатеринбург: УГТУ, 1997. - 110 с. - ISBN 5-230-17046-8.