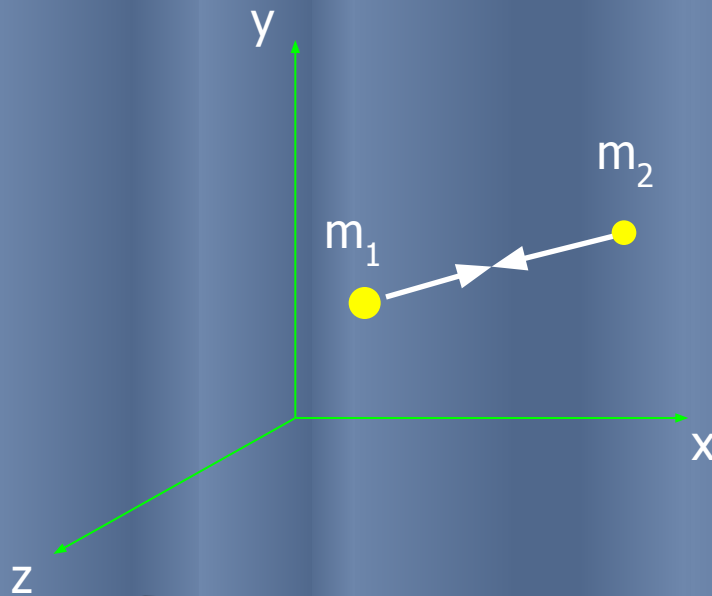


Задача двух тел

Уравнения движения в задаче двух тел

- Движение двух материальных точек будем рассматривать в инерциальной системе отсчета.



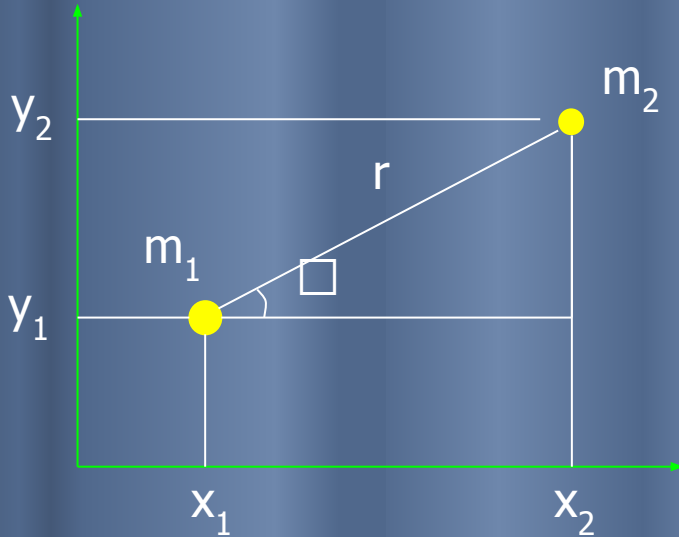
Массы m_1 и m_2 притягивают друг друга с силой

$$F = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Из рисунка видно, что

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\cos \psi = \frac{x_1 - x_2}{r}$$



Сила, действующая на тело m_2 вдоль оси x

$$F_x = m_2 a_2 = F \cos \psi = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} (x_1 - x_2)$$

Аналогично находятся проекции F_y и F_z

Уравнения движения тела m_2 , притягиваемого телом m_1 будут иметь вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= \frac{k^2 m_1}{r^3} (x_1 - x_2), \\ \ddot{y}_2 &= \frac{k^2 m_1}{r^3} (y_1 - y_2), \\ \ddot{z}_2 &= \frac{k^2 m_1}{r^3} (z_1 - z_2).\end{aligned}\tag{1}$$

Аналогично находим уравнения движения тела m_1 под влиянием притяжения от тела m_2

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{k^2 m_2}{r^3} (x_2 - x_1), \\ \ddot{y}_1 &= \frac{k^2 m_2}{r^3} (y_2 - y_1), \\ \ddot{z}_1 &= \frac{k^2 m_2}{r^3} (z_2 - z_1). \end{aligned} \quad (2)$$

Вычитая из (1) уравнения (2) находим уравнения движения тела m_2 относительно m_1

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r^3}(x_2 - x_1),$$

$$\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r^3}(y_2 - y_1),$$

$$\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r^3}(z_2 - z_1).$$

Вводя обозначения $\mu = k^2(m_1 + m_2)$

и $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$

окончательно получим

$$\square + \frac{\mu x}{r^3} = 0,$$

$$\square + \frac{\mu y}{r^3} = 0, \quad (3)$$

$$\square + \frac{\mu z}{r^3} = 0.$$

Интегралы площадей

Умножаем первое уравнение системы (3) на $-y$, второе – на x , и складываем их. Затем складываем второе, умноженное на $-z$, с третьим, умноженным на y и первое, умноженное на z с третьим, умноженным на $-x$.

$\dot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = 0$	$-y$		z
$\dot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = 0$	x	$-z$	
$\dot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = 0$		y	$-x$

Интегралы площадей

В итоге получим:

$$xy - yx = 0, \quad yz - zy = 0, \quad zx - xz = 0.$$

Интегрируя эти соотношения, находим

$$xy - yx = a_1, \quad yz - zy = a_2, \quad zx - xz = a_3$$

(4)

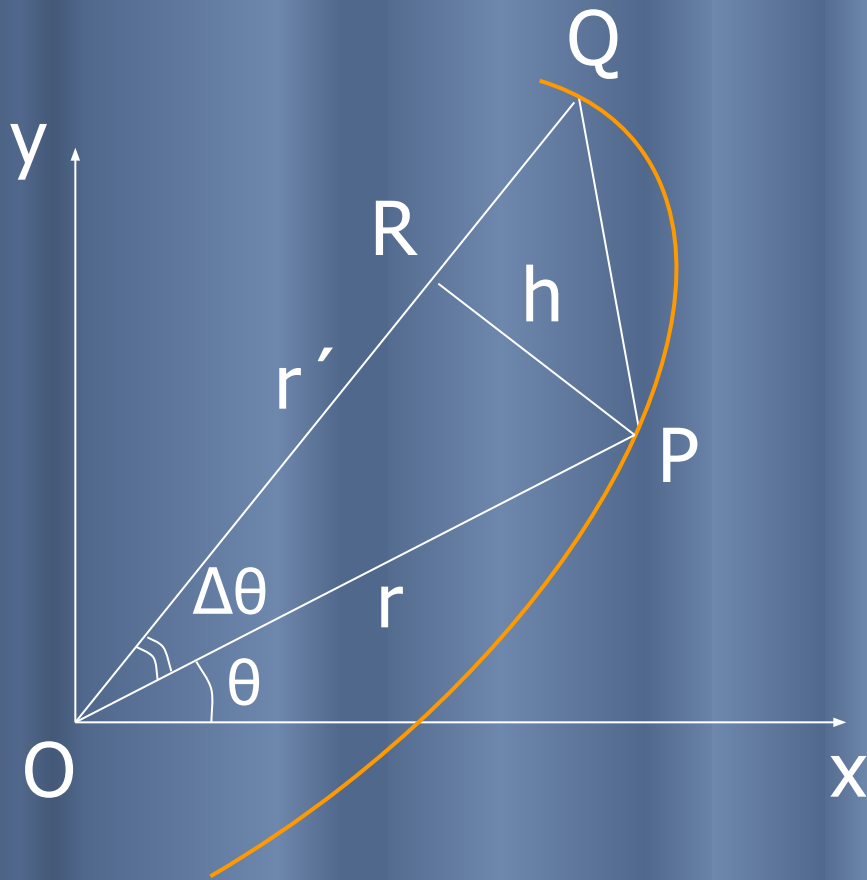
Домножаем равенства (4) на z, x, y соответственно и складываем

$$\begin{array}{l|l} \dot{x}y - \dot{y}x = a_1 & z \\ \dot{y}z - \dot{z}y = a_2 & x \\ \dot{z}x - \dot{x}z = a_3 & y \end{array}$$

получим:

$$a_1z + a_2x + a_3y = 0 \quad (5)$$

Это **уравнение плоскости**, проходящей через начало координат. В этой плоскости происходит движение тела m_2 .
Постоянные a_1, a_2, a_3 определяют положение плоскости орбиты этого тела относительно осей координат. Смысл этих постоянных можно усмотреть из следующего рисунка.



Обозначим через ΔA – площадь треугольника OPQ , описанного радиус-вектором за время Δt .

$$\Delta A = \frac{1}{2} r' \cdot h$$

Из треугольника OPR имеем

$$h = r \sin(\Delta\theta)$$

Поэтому

$$\Delta A = \frac{1}{2} r' r \sin(\Delta\theta)$$

Перепишем последнее равенство в виде:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r' r \frac{\sin(\Delta \theta)}{\Delta \theta} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

При $\Delta \theta \rightarrow 0$ отношение площади треугольника к площади сектора $\rightarrow 1$, $r' \rightarrow r$, $\frac{\sin(\Delta \theta)}{\Delta \theta} \rightarrow 1$.

В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ имеем:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (6)$$

Это **секториальная скорость** движущейся точки.

Посмотрим теперь как будет выглядеть последнее выражение в прямоугольных координатах:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}.$$

Отсюда: $\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right),$

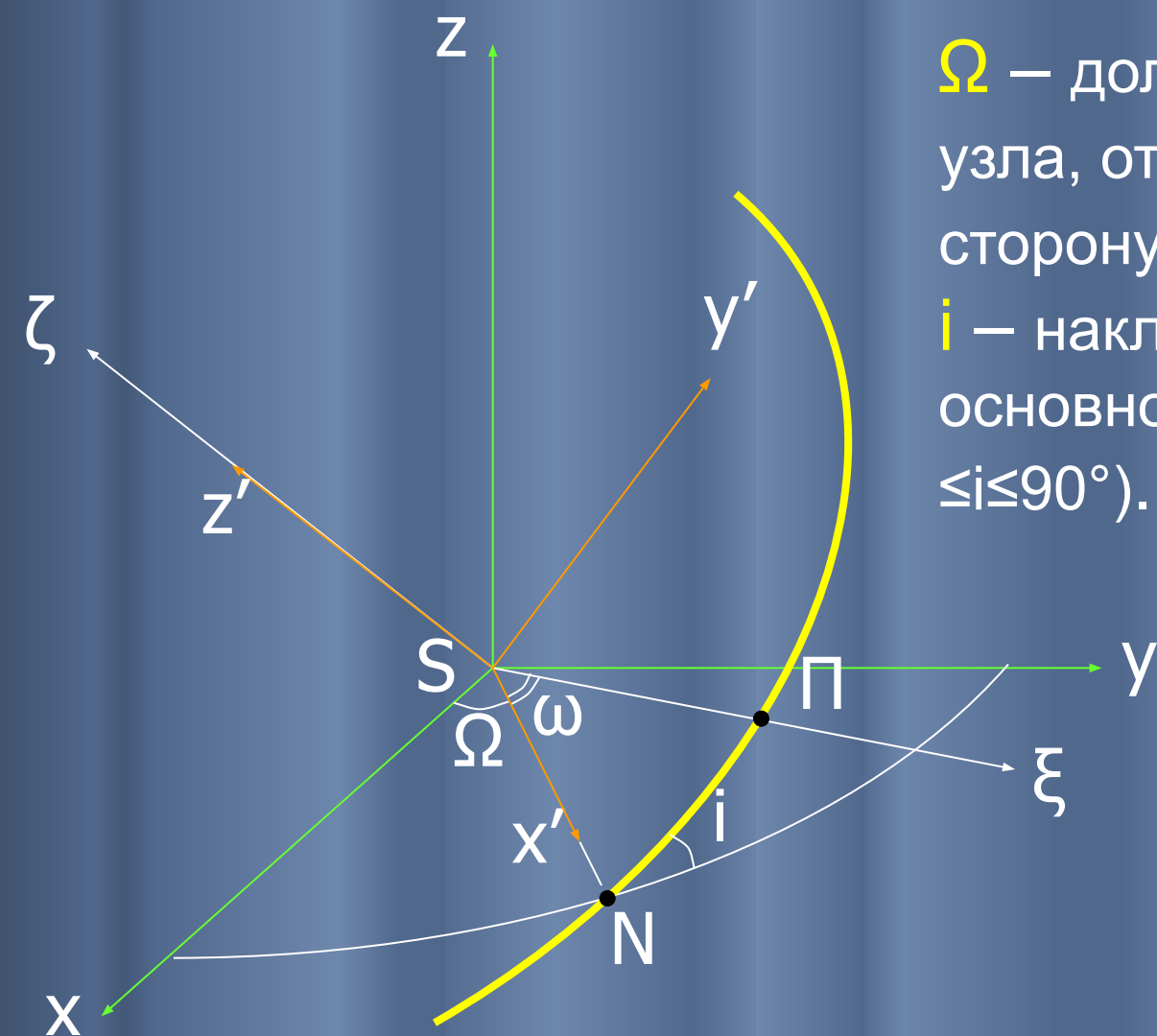
$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \left(\frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{x^2} \right) = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}.$$

В итоге находим: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (!!!)$

Постоянные a_1 , a_2 , a_3 – проекции удвоенной секториальной скорости на плоскости xy , yz и zx ! Поэтому удвоенная секториальная скорость в плоскости орбиты будет:

$$c = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (7)$$

При решении астрономических задач положение в пространстве плоскости орбиты принято определять не коэффициентами ее уравнения, а двумя углами Ω и i , имеющими смысл, усматриваемый из следующего рисунка:

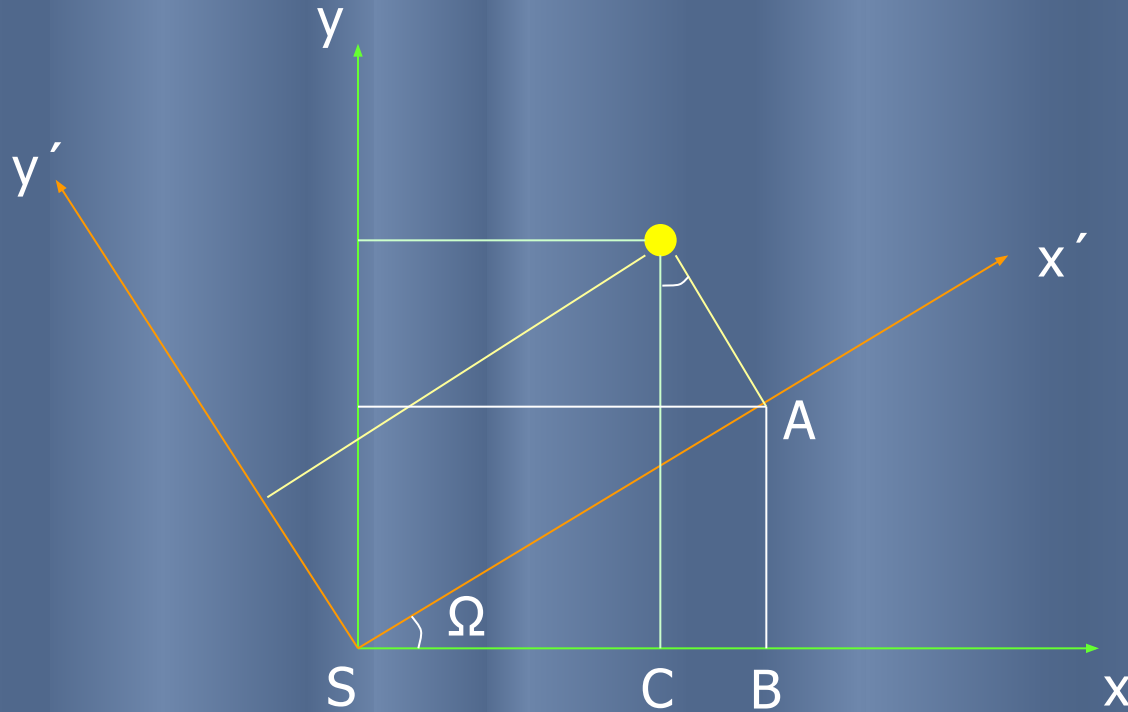


Ω — долгота восходящего узла, отсчитывается от оси x в сторону оси y ($0^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ$);
 i — наклон плоскости орбиты к основной плоскости ($0^\circ \leq i \leq 90^\circ$).

Свяжем постоянные a_1 , a_2 , a_3 с Ω и i . Для этого перейдем от системы координат $Sxyz$ к системе $Sx'y'z'$ (в ней орбита — основная плоскость)

Сделаем два поворота: вокруг оси Sz на угол Ω и вокруг оси Sx' на угол i .

Поворот вокруг оси Sz на угол Ω

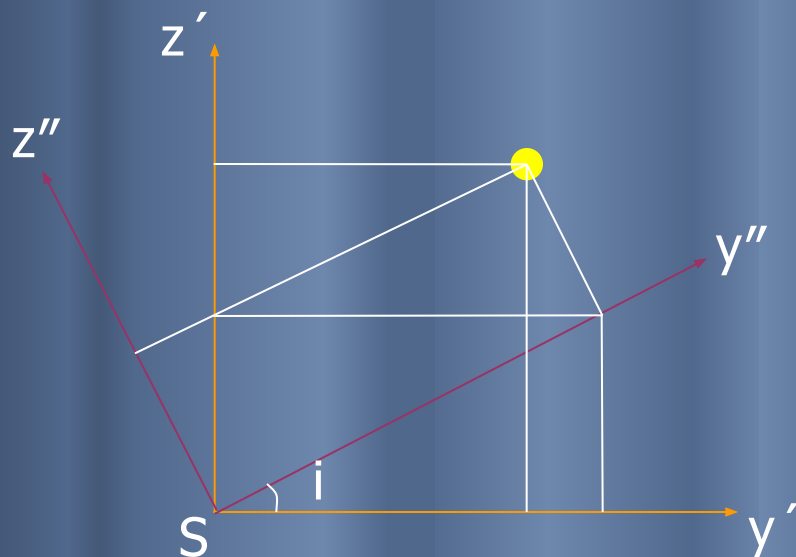


$$\begin{aligned}x &= SB - CB = x' \cos \Omega - y' \sin \Omega, \\y &= x' \sin \Omega + y' \cos \Omega, \\z &= z'.\end{aligned}\tag{8}$$

В матричной форме этот поворот можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Поворот вокруг оси Sx' на угол i



$$\begin{aligned} x' &= x'', \\ y' &= y'' \cos i - z'' \sin i, \\ z' &= y'' \sin i + z'' \cos i. \end{aligned} \quad (10)$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad (11)$$

Таким образом, после двух поворотов, имеем:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Перемножив поворотные матрицы получим:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\cos i \sin \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos i \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad (12)$$

Так как компоненты удвоенной секториальной скорости в системе координат $Oxyz$ есть a_1, a_2, a_3 , а в плоскости орбиты – $0, 0, c$, то они связаны друг с другом при помощи последнего соотношения:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\cos i \sin \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos i \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} a_1 &= c \sin i \sin \Omega \\ a_2 &= -c \sin i \cos \Omega \\ a_3 &= c \cos i \end{aligned} \quad (13)$$

Перепишем теперь интегралы площадей:

$$\begin{aligned}x\dot{y} - y\dot{x} &= c \sin i \sin \Omega, \\y\dot{z} - z\dot{y} &= -c \sin i \cos \Omega, \\z\dot{x} - x\dot{z} &= c \cos i.\end{aligned}\tag{14}$$

Осталось связать здесь с элементами орбиты постоянную c . Для этого найдем сначала из уравнений движения (3) **интеграл живых сил** (интеграл энергии).

Умножим первое, второе и третье уравнения системы (3) на $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$

$$\begin{array}{l|l} \dot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = 0 & \dot{x} \\ \dot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = 0 & \dot{y} \\ \dot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = 0 & \dot{z} \end{array}$$

Сложив, получим:

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} = -\frac{\mu}{r^3}(\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z})$$

Левую часть равенства

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = -\frac{\mu}{r^3}(xx + yy + zz)$$

можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2)$$

Правую – в виде:

$$-\frac{1}{2} \frac{\mu}{r^3} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2) = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{r^3} \frac{d}{dt} (r^2) = -\frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Интегрирование последнего выражения дает нам **интеграл энергии**:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2 \left(\frac{\mu}{r} + h \right) \quad (15)$$

Здесь h – постоянная интеграла энергии.

Так как движение происходит в плоскости, то координата $z''=0$, а радиус-вектор

$$r = \sqrt{x''^2 + y''^2}$$

Интеграл площадей и интеграл живых сил в плоскости орбиты будут иметь вид

$$x''y'' - y''x'' = c$$

$$\dot{x}''^2 + \dot{y}''^2 = 2 \left(\frac{\mu}{r} + h \right)$$

Перейдем теперь от прямоугольных координат x'' , y'' к полярным координатам r , u

$$x'' = r \cos u, \quad y'' = r \sin u$$

$$\dot{x}'' = \dot{r} \cos u - r \sin u \cdot \dot{u}, \quad \dot{y}'' = \dot{r} \sin u + r \cos u \cdot \dot{u}$$

Интеграл площадей и интеграл живых сил в полярных координатах будут иметь вид

$$r^2 \dot{u} = c, \quad (16)$$

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{u}^2 = 2 \left(\frac{\mu}{r} + h \right). \quad (17)$$

Из равенств (16) и (17) имеем

$$u = \frac{c}{r^2} \longrightarrow \frac{1}{r^2} + \frac{c^2}{r^2} = 2 \left(\frac{\mu}{r} + h \right)$$

Таким образом

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{-\frac{c^2}{r^2} + 2 \left(\frac{\mu}{r} + h \right)} \quad (18)$$

При помощи (16) можно найти

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{c}{r^2} = -\frac{d}{du} \left(\frac{c}{r} \right)$$

Уравнение (18) можно переписать в виде:

$$-\frac{d}{du}\left(\frac{c}{r}\right) = \sqrt{-\frac{c^2}{r^2} + 2\left(\frac{\mu}{r} + h\right)}$$

Преобразуем подкоренное выражение:

$$-\frac{c^2}{r^2} + 2\frac{\mu}{r} + 2h = 2h + \frac{\mu^2}{c^2} - \left(-\frac{\mu}{c} + \frac{c}{r}\right)^2$$

Обозначим:

$$q = -\frac{\mu}{c} + \frac{c}{r}, \quad Q^2 = 2h + \frac{\mu^2}{c^2}.$$

Имеем: $\frac{dq}{du} = -\sqrt{Q^2 - q^2} = -Q\sqrt{1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2}.$

Далее $\frac{d\left(\frac{q}{Q}\right)}{du} = -\sqrt{1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2}.$

Введем замену $\sigma = \frac{q}{Q}.$

Получим: $\frac{d\sigma}{du} = -\sqrt{1 - \sigma^2},$ или $-\frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} = du.$

Последнее выражение можно проинтегрировать

$$u = \arccos \sigma + \omega$$

где ω – постоянная интегрирования.

Отсюда $\sigma = \cos(u - \omega)$

Но
$$\sigma = \frac{q}{Q} = \frac{-\frac{\mu}{c} + \frac{c}{r}}{\sqrt{2h + \frac{\mu^2}{c^2}}}.$$

Поэтому
$$-\frac{\mu}{c} + \frac{c}{r} = \sqrt{2h + \frac{\mu^2}{c^2}} \cos(u - \omega),$$

или
$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2} + \frac{1}{c} \sqrt{2h + \frac{\mu^2}{c^2} \cos(u - \omega)}.$$

Отсюда
$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{c}{\mu} \sqrt{2h + \frac{\mu^2}{c^2} \cos(u - \omega)}}.$$

Сравнивая теперь со стандартным уравнением конического сечения

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad \text{где } p = a(1 - e^2) \text{ – параметр орбиты}$$

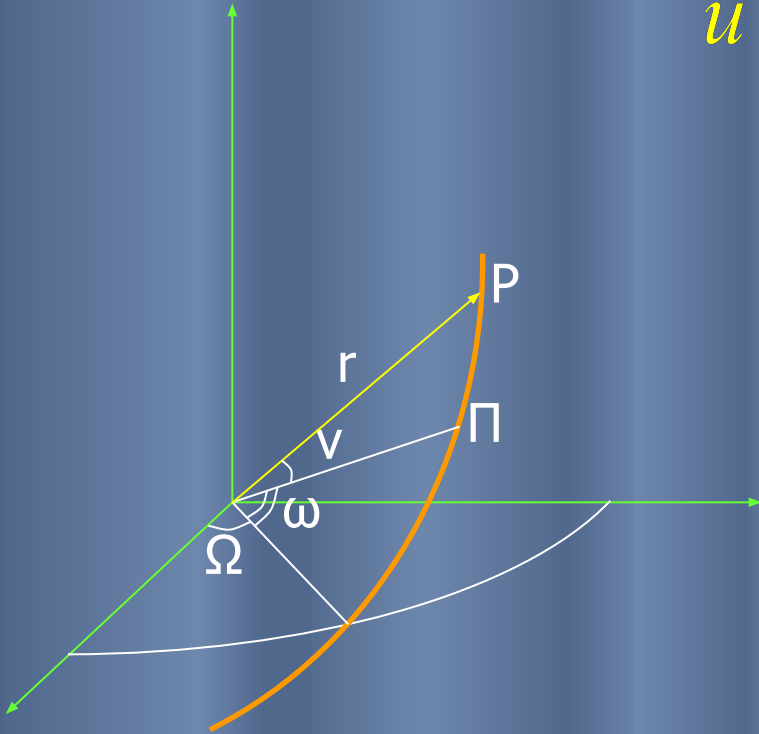
a – большая полуось

e – эксцентриситет

находим: $c = \sqrt{p\mu}$, $h = -\frac{\mu}{2a}$, $v = u - \omega$.

Здесь ω – аргумент перицентра (угловое расстояние перицентра от узла).

$u = v + \omega$ – аргумент широты.



Т.о. мы определили постоянные c и h через общепринятые элементы a, e, p .

С этими постоянными интеграл энергии

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (19)$$

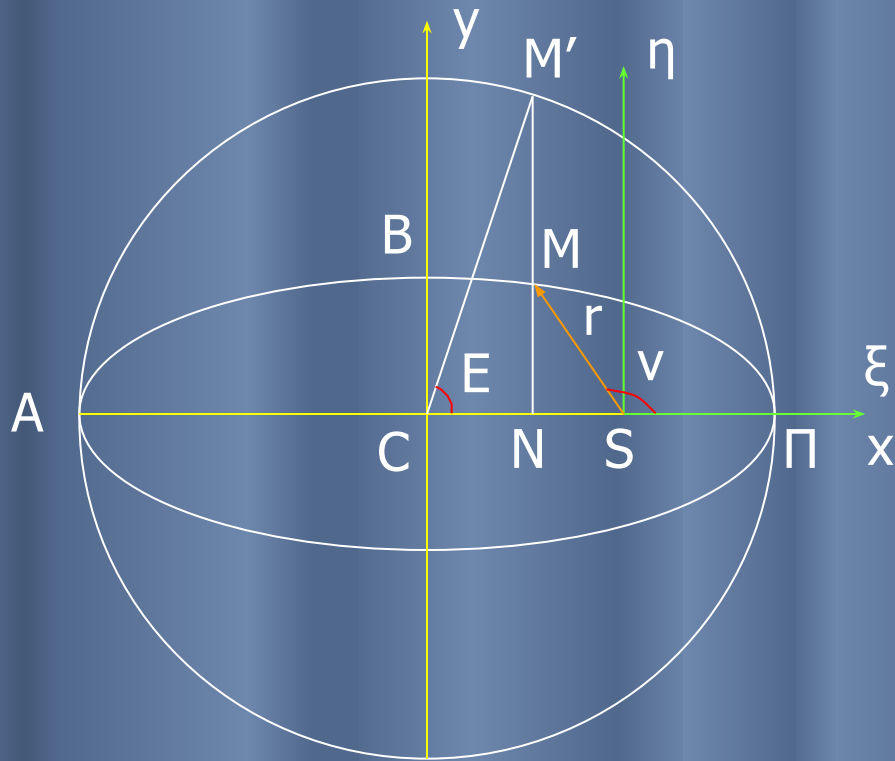
Уравнение траектории

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \quad (20)$$

Уравнение интеграла площадей:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}. \quad (21)$$

Введем для случая эллиптического движения некоторую вспомогательную переменную – эксцентрическую аномалию E :



Из рис. видно, что

$$CS = CN + NS = ae,$$

$$CN = a \cos E,$$

$$NS = -r \cos \nu.$$

Поэтому:

$$ae = a \cos E - r \cos v$$

T.e. $r \cos \nu = a(\cos E - e).$ (22)

Отношение малой и большой полуоси будет:

$$\frac{b}{a} = \frac{MN}{M'N} = \frac{y}{y'} \quad (\text{см. след. слайд})$$

Здесь

$$b = a\sqrt{1-e^2}, \quad M'N = a \sin E, \quad MN = r \sin v.$$

Отсюда имеем:

$$r \sin v = a\sqrt{1-e^2} \sin E. \quad (23)$$

Возводя (22) и (23) в квадрат и складывая, получим:

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (24)$$

- $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ – уравнение эллипса
- $x'^2/a^2 + y'^2/a^2 = 1$ – уравнение окружности
- $x = x'$
- $y = MN$
- $y' = M'N$

Подставляя (24) в (22) и (23), получим соотношения, связывающие истинную и эксцентрическую аномалии:

$$\begin{aligned}\sin v &= \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1-e \cos E}, \\ \cos v &= \frac{\cos E - e}{1-e \cos E}.\end{aligned}\tag{25}$$

Можно найти также соотношения, связывающие тангенсы половинных углов v и E :

$$\begin{aligned} r - r \cos v &= a(1 + e)(1 - \cos E), \\ r + r \cos v &= a(1 - e)(1 + \cos E). \end{aligned} \quad (25')$$

Делим первое на второе:

$$\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} = \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) \left(\frac{1 - \cos E}{1 + \cos E} \right).$$

Используя тригонометрические соотношения

$$1 - \cos v = 2 \sin^2 \frac{v}{2}, \quad 1 + \cos v = 2 \cos^2 \frac{v}{2},$$

окончательно находим:

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}.} \quad (26)$$

Найдем теперь уравнение, связывающее переменную **E** со временем. Дифференцируя соотношение (26) получим:

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{v}{2}} \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{\cos^2 \frac{E}{2}} \frac{dE}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\cos^2 \frac{E}{2}}{\cos^2 \frac{v}{2}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \frac{dv}{dt}.$$

Учитывая, что

$$\cos^2 \frac{E}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos E), \quad \cos^2 \frac{\nu}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \nu),$$

Имеем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1 + \cos E}{1 + \cos \nu} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \frac{d\nu}{dt}$$

Из интеграла площадей (21)

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{r^2}$$

Используя также выражение для радиус-вектора (24)

$$r = a(1 - e \cos E).$$

и второе из соотношений (25')

$$r + r \cos v = a(1 - e)(1 + \cos E).$$

находим:

$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{1}{1 - e \cos E},$$

Откуда имеем

$$(1 - e \cos E) \frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

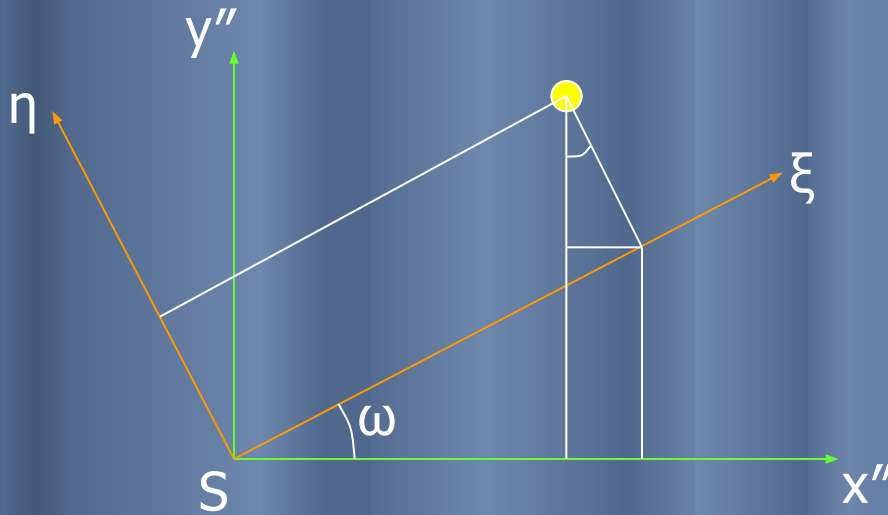
Интегрируя, находим:

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau). \quad (27)$$

Здесь τ — постоянная интегрирования (момент прохождения через перигелий), а само уравнение — знаменитое **уравнение Кеплера**.

Чтобы связать движение в плоскости орбиты с движением в пространстве, надо сделать еще один поворот системы координат.

Поворот системы координат $Sx''y''z''$ вокруг оси Sz'' на угол ω :



$$\begin{aligned}x'' &= \xi \cos \omega - \eta \sin \omega, \\y'' &= \xi \sin \omega + \eta \cos \omega, \\z'' &= \zeta.\end{aligned}$$

В матричной форме:

$$\begin{vmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix}.$$

Таким образом, получить выражения для координат x, y, z через элементы орбиты можно при помощи трех поворотных матриц:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Сокращенно это можно записать так:

$$\{x, y, z\} = Z(\Omega)X(i)Z(\omega)\{\xi, \eta, 0\}, \quad (28)$$

где $X(i)$ – матрица, соответствующая повороту вокруг оси абсцисс на угол i , а $Z(\Omega)$ и $Z(\omega)$ матрицы поворота вокруг оси аппликат на угол Ω и угол ω соответственно.

Так как движение в задаче двух тел происходит в плоскости, то в прямоугольной орбитальной системе координат $\{\xi, \eta, \zeta\}$ координата $\zeta=0$, а координаты ξ и η , как это следует из рисунка на слайде 35 и соотношений (22) и (23)

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos v = a(\cos E - e), \\ \eta &= r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E.\end{aligned}\tag{29}$$

Уравнение Кеплера, связывающее эксцентрическую аномалию и время, обычно записывают в виде:

$$E - e \sin E = M,$$

где $M = n(t - \tau)$. $\longrightarrow$ средняя аномалия

Среднюю аномалию обычно представляют в виде

$$M = n(t - t_0) + M_0 \quad \text{где} \quad M_0 = n(t_0 - \tau)$$

Величина $n = \sqrt{\mu / a^3}$ есть среднее движение по орбите.

Формулы, связывающие координаты x, y, z с элементами орбиты

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

$$\xi = r \cos v = a(\cos E - e),$$

$$\eta = r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

$$E - e \sin E = M,$$

$$M = n(t - t_0) + M_0$$

- Формулы для скоростей находим дифференцированием формул для координат

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varpi & -\sin \varpi & 0 \\ \sin \varpi & \cos \varpi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\xi} = -a \sin E \cdot \dot{E}$$

$$\dot{\eta} = a \sqrt{1 - e^2} \cos E \cdot \dot{E}$$

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E}$$

- Формулы для координат и скоростей представляют также в виде

$$x = P_x \xi + Q_x \eta$$

$$y = P_y \xi + Q_y \eta$$

$$z = P_z \xi + Q_z \eta$$



$$\dot{x} = \dot{P}_x \xi + \dot{Q}_x \eta$$

$$\dot{y} = \dot{P}_y \xi + \dot{Q}_y \eta$$

$$\dot{z} = \dot{P}_z \xi + \dot{Q}_z \eta$$

Проективные коэффициенты

$$P_x = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i$$

$$P_y = \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i$$

$$P_z = \sin \omega \sin i$$

$$Q_x = -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i$$

$$Q_y = -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i$$

$$Q_z = \cos \omega \sin i$$