

*Особые приёмы решения
логарифмических
неравенств с переменной
в основании*

Занятие №2

*Методическая разработка
учителя Поляковой Е. А.*

Решение простейших логарифмических неравенств:

$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \\ 0 < a < 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases}$$

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \\ 0 < a < 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases}$$

*В предыдущем занятии
было доказано:*

выражения

$\log_a b$ и $(b - 1)(a - 1)$

имеют один знак

Решение логарифмических неравенств с применением доказанного свойства:

неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно
неравенству $(f - g)(h - 1) > 0$ на ОДЗ

неравенство $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$ равносильно
неравенству $(f - g)(h - 1) < 0$ на ОДЗ

Алгоритм решения неравенства $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$

1) Находим область допустимых значений переменной (ОДЗ):

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

(Условимся далее две последние строки системы писать одной так: $0 < h(x) \neq 1$)

2) Решаем неравенство $(f(x) - g(x))(h(x) - 1) > 0$.

3) Для найденного решения учитываем ОДЗ.

4) Записываем ответ.

Решите неравенство: $\log_{x-3} (x-1) < 2;$

1) ОДЗ:
$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ 0 < x-3 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ 3 < x \neq 4; \end{cases} \quad \underline{3 < x \neq 4.}$$

2) Переписываем неравенство в виде

$$\log_{x-3} (x-1) < \log_{x-3} (x-3)^2;$$

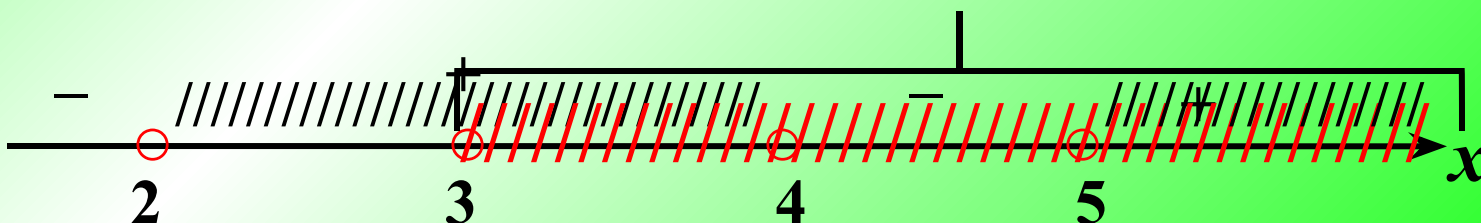
Решаем неравенство $(x-1 - (x-3)^2)(x-3-1) < 0;$

$$(x-1 - x^2 + 6x - 9)(x-4) < 0; \quad -(x^2 - 7x + 10)(x-4) < 0;$$

$$(x^2 - 7x + 10)(x-4) > 0; \quad (x-5)(x-2)(x-4) > 0;$$

ОДЗ

Ответ: $3 < x < 4; x > 5$



Решите неравенство: $\log_{x^2} (3 - 2x) > 1$

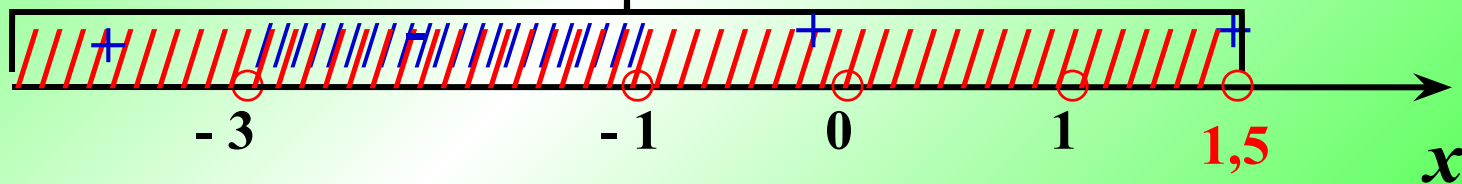
1) ОДЗ:
$$\begin{cases} 3 - 2x > 0, \\ 0 < x^2 \neq 1; \\ x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x < 1,5, \\ x \neq \pm 1, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

2) $\log_{x^2} (3 - 2x) > 1 \Leftrightarrow \log_{x^2} (3 - 2x) > \log_{x^2} x^2$

$$(3 - 2x - x^2)(x^2 - 1) > 0; \quad (x^2 + 2x - 3)(x - 1)(x + 1) < 0;$$

$$(x + 3)(x - 1)(x - 1)(x + 1) < 0;$$

ОДЗ



Ответ: $(-3; -1)$

Решите неравенство: $\log_{x^2+3} (x+3) < 1$

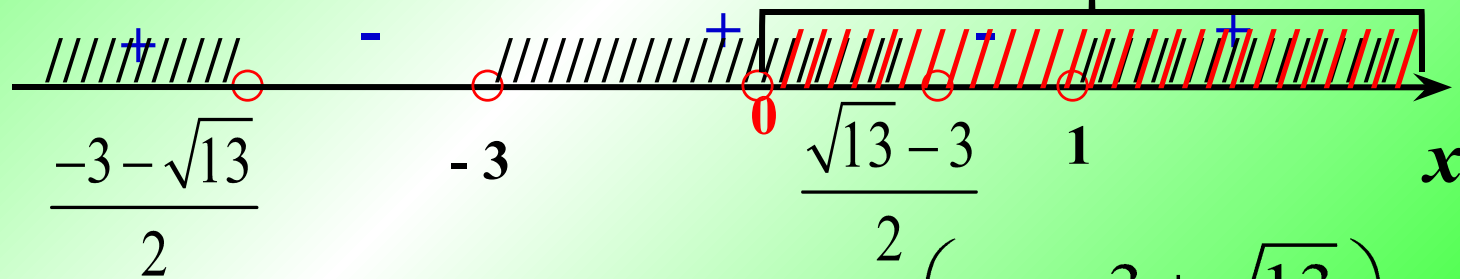
1) ОДЗ:
$$\begin{cases} x+3 > 0, \\ x^2+3x > 0, \\ x^2+3x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x > -3, \\ x(x+3) > 0, \\ x^2+3x-1 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x \neq \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x > -3, \\ x(x+3) > 0; \end{cases} \quad 0 < x \neq \frac{\sqrt{13}-3}{2}.$$

2) $\log_{x^2+3} (x+3) < 1 \Leftrightarrow \log_{x^2+3} (x+3) < \log_x \log_{x^2+3} (x^2+3x)$

$(x+3-x^2-3x)(x^2+3x-1) < 0; \quad (x^2+2x-3)(x^2+3x-1) > 0;$

$(x+3)(x-1) \left(x - \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \right) \left(x - \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \right) > 0; \text{ ОДЗ}$

$\sqrt{13} \approx 3,6$



Ответ: $\left(0; \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \right) \cup (1; +\infty)$

Решите неравенство: $\log_x \frac{15}{1-2x} < -2$

1) ОДЗ: $\begin{cases} \frac{15}{1-2x} > 0, \\ 0 < x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1-2x > 0, \\ 0 < x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0,5, \\ 0 < x \neq 1; \end{cases} \quad \underline{0 < x < 0,5.}$

2) $\log_x \frac{15}{1-2x} < -2 \quad | \cdot (-1); \quad -1 \cdot \log_x \frac{15}{1-2x} > 2;$

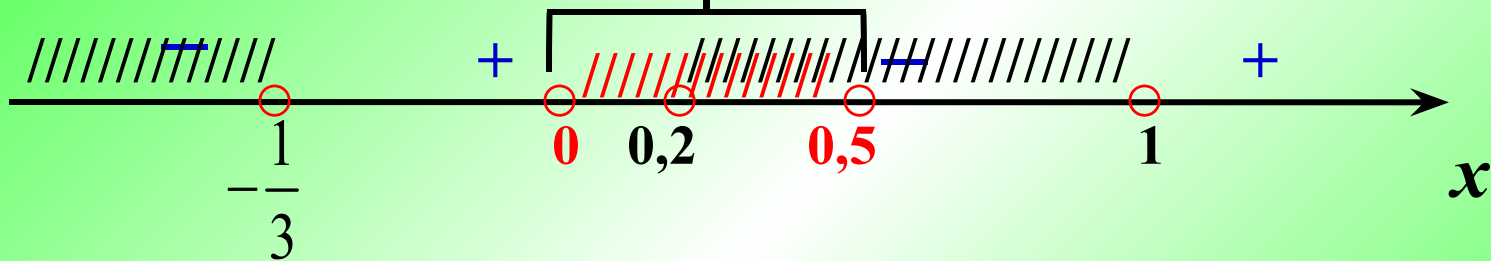
$$\log_x \left(\frac{15}{1-2x} \right)^{-1} > \log_x x^2; \quad \log_x \frac{1-2x}{15} > \log_x x^2;$$

$$\left(\frac{1-2x}{15} - x^2 \right) (x-1) > 0; \quad \frac{(1-2x-15x^2)(x-1)}{15} > 0 \quad | \cdot (-15);$$

$$(15x^2 + 2x - 1)(x - 1) < 0; \quad 15\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right)(x - 1) < 0 \quad | \quad : 15;$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 0,2)(x - 1) < 0; \quad \text{ОДЗ: } \underline{0 < x < 0,5.}$$

ОДЗ



Ответ: $0,2 < x < 0,5$

1) Решите неравенство: $\log_{3-x} \frac{1}{|x|} > 1$

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

2) Решите неравенство: $\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2} - 2^{11x}} \geq 0$

Ответ: $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

**Продолжение следует,
до новых встреч**