

Тема :
«Преобразование
графиков функции»

Цели:

- 1) Систематизировать приемы построения графиков.
- 2) Показать их применение при построении:
 - а) графиков сложных функций;
 - б) при решении заданий ЕГЭ из части С.



Рассмотрим основные правила преобразования графиков на примерах элементарных функций

1) Преобразование симметрии относительно оси x

$f(x) \rightarrow -f(x)$

Примеры:

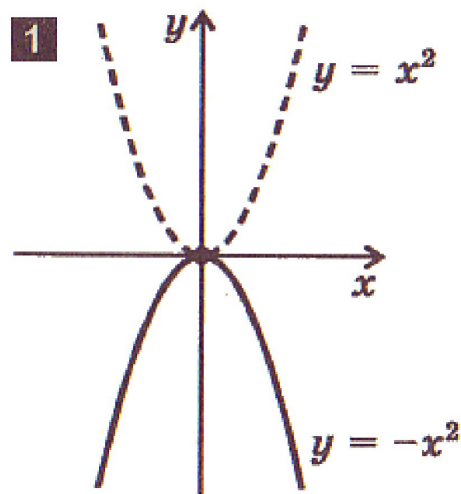
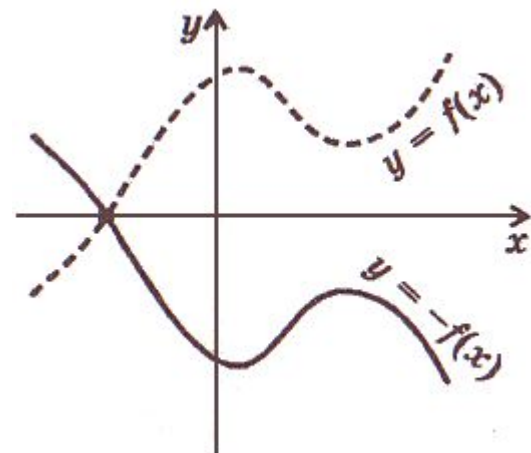
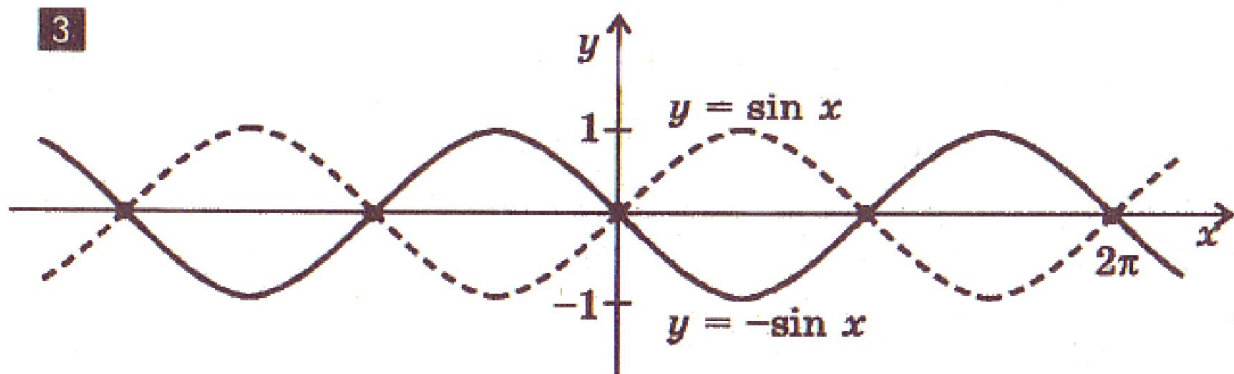
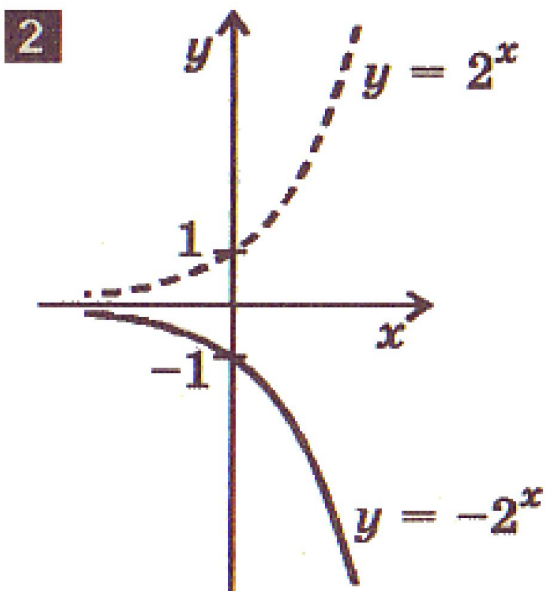


График функции $y = -f(x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси x .



Замечание. Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.



2) Преобразование симметрии относительно оси y $f(x) \leftrightarrow f(-x)$

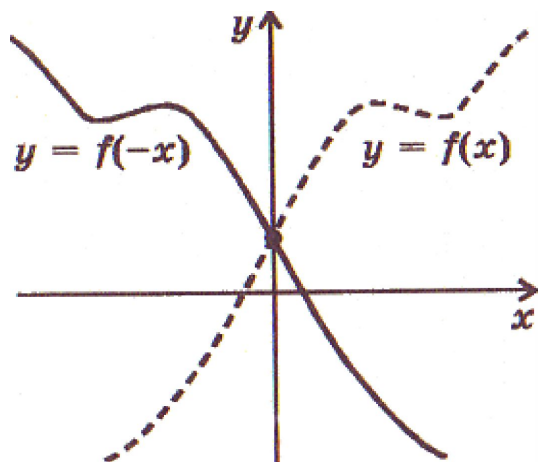
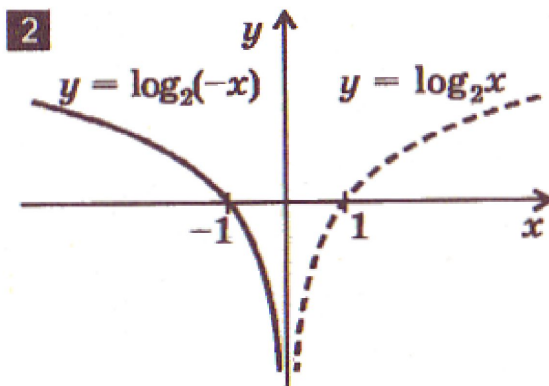
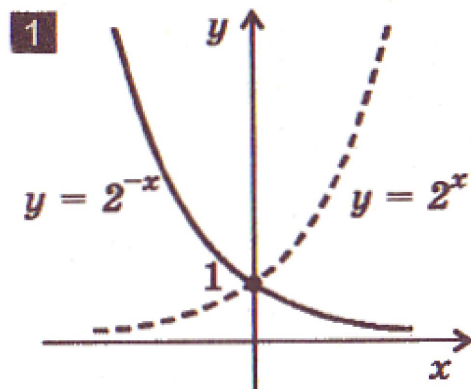


График функции $y=f(-x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y=f(x)$ относительно оси y .

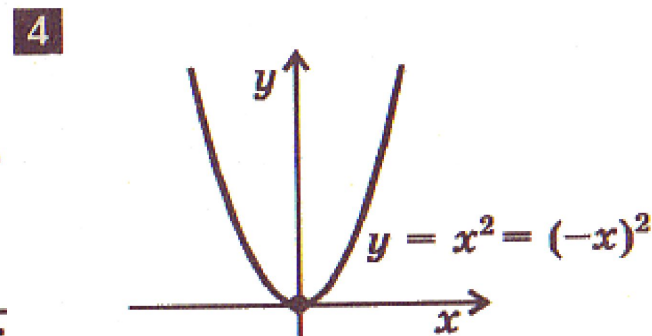
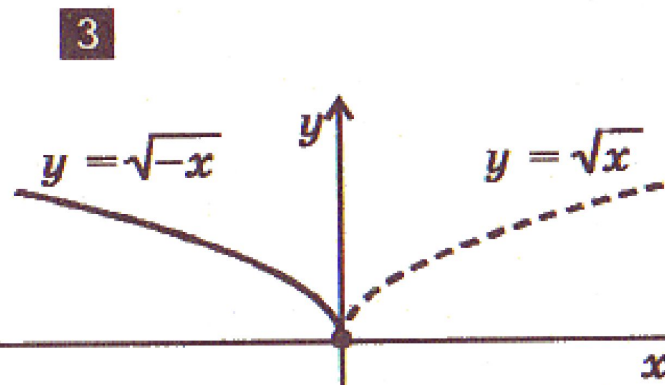
Замечание. Точка пересечения графика с осью y остается неизменной.

Замечание 1. График четной функции не изменяется при отражении относительно оси y , поскольку для четной функции $f(-x)=f(x)$. **Пример:** $(-x)^2=x^2$

Примеры:



Замечание 2. График нечетной функции изменяется одинаково как при отражении относительно оси x , так и при отражении относительно оси y , поскольку для нечетной функции $f(-x)=-f(x)$. **Пример:** $\sin(-x)=-\sin x$.

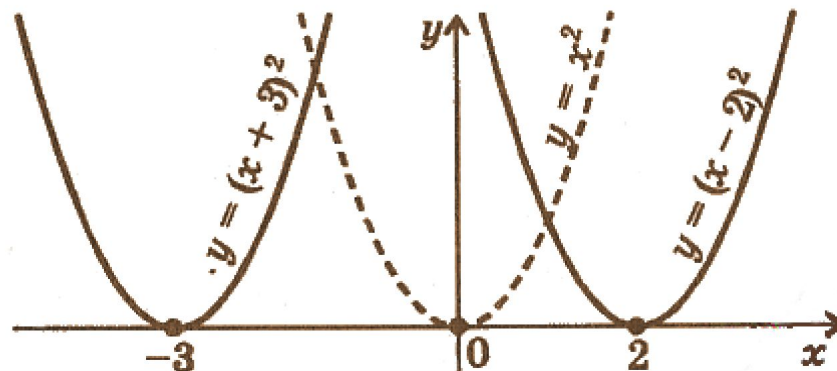


3) Параллельный перенос вдоль оси x $f(x) \rightarrow f(x-a)$

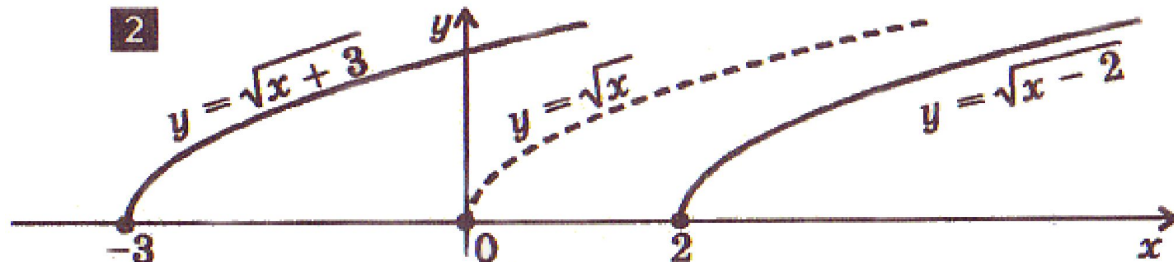
Примеры:

График функции $y=f(x-a)$ получается параллельным переносом графика функции $y=f(x)$ вдоль оси x на $|a|$ вправо при $a>0$ и влево при $a<0$.

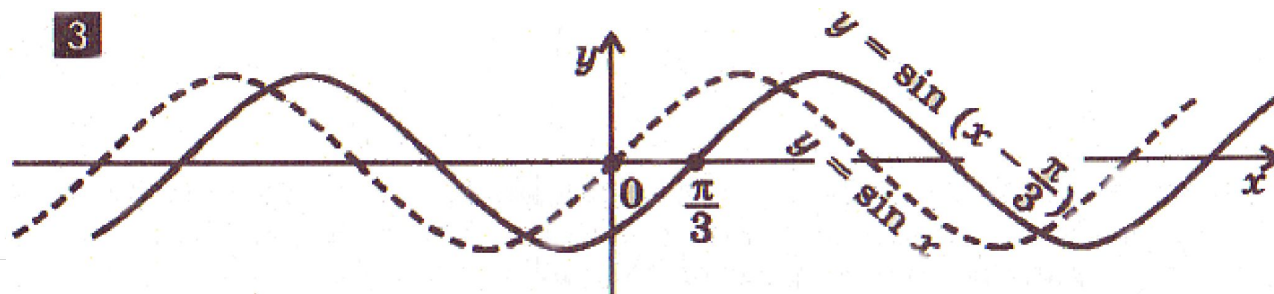
1



2



3



Замечание. График периодической функции с периодом T не изменяется при параллельных переносах вдоль оси x на nT , $n \in \mathbb{Z}$.

4) Параллельный перенос вдоль оси y $f(x) \rightarrow f(x) + b$

Примеры:

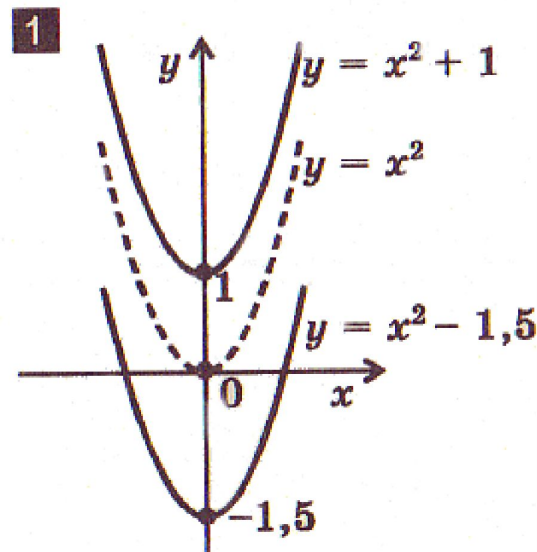
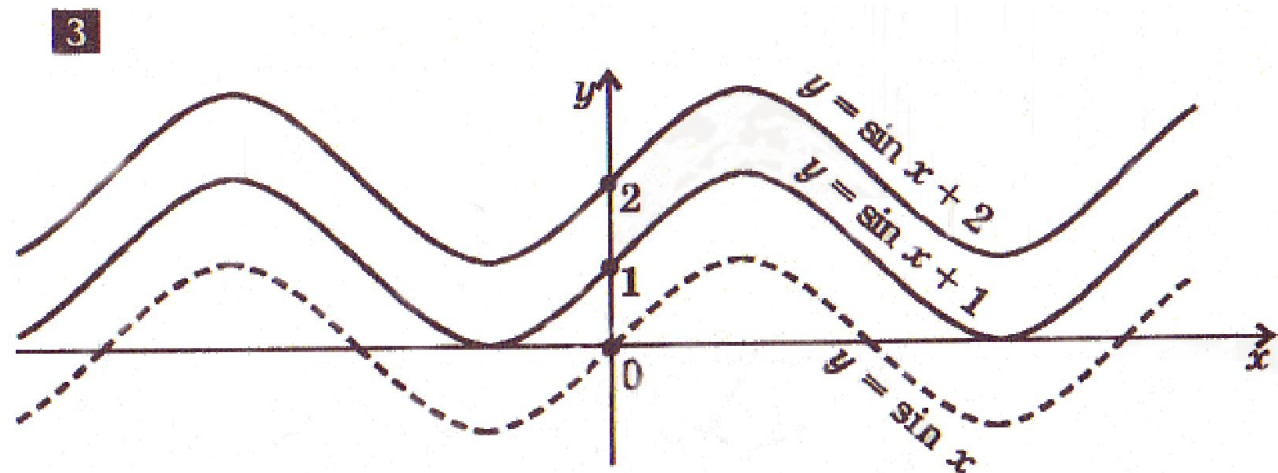
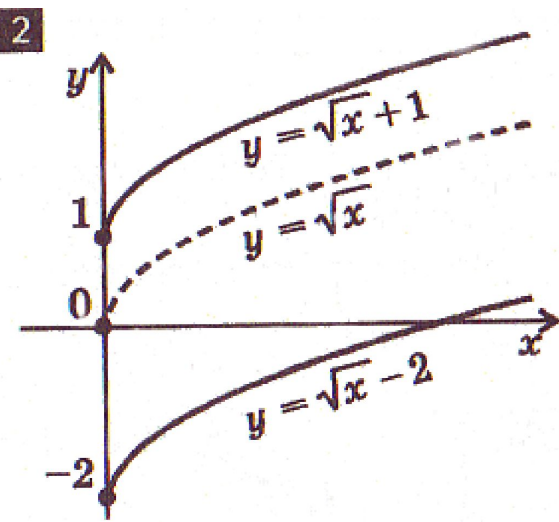
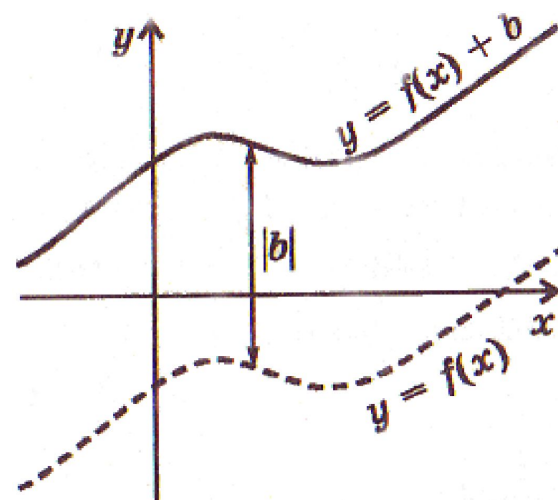


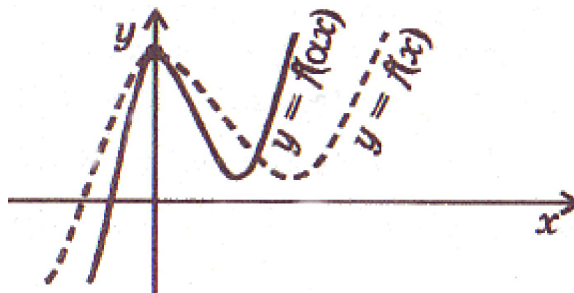
График функции $y = f(x) + b$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y на $|b|$ вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$.



5) Сжатие и растяжение вдоль оси x

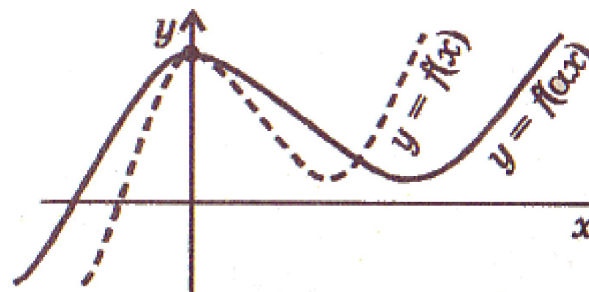
$$f(x) \rightarrow f(\alpha x), \text{ где } \alpha > 0$$

$$\alpha > 1$$



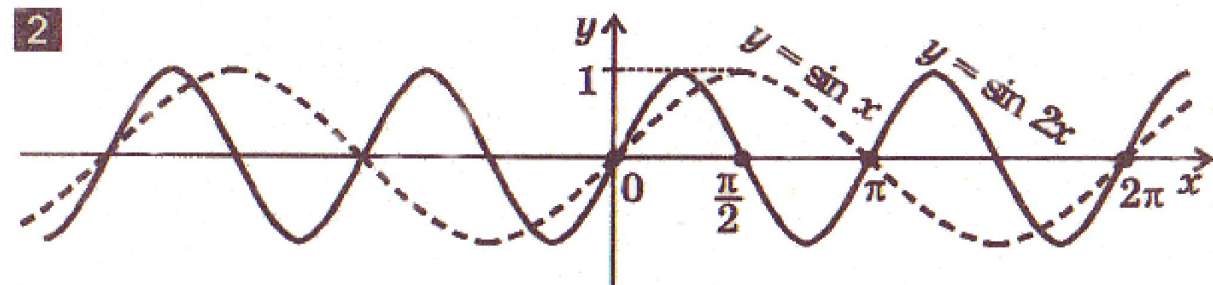
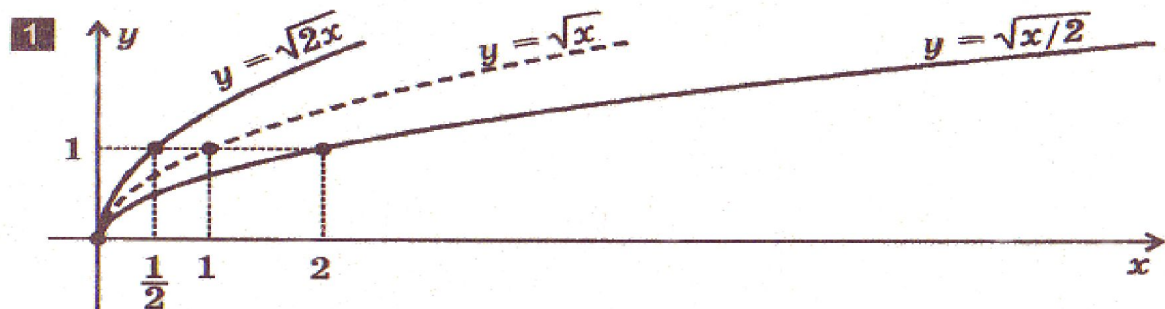
$\alpha > 1$ График функции $y=f(\alpha x)$ получается сжатием графика функции $y=f(x)$ вдоль оси x в α раз.

$$0 < \alpha < 1$$



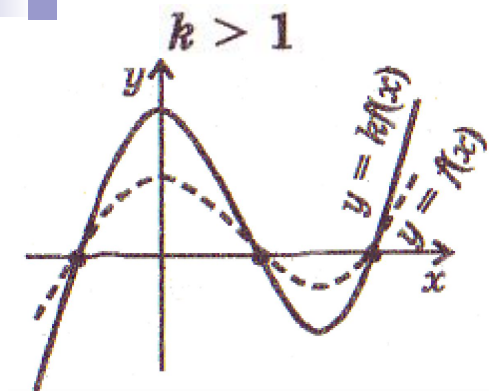
$0 < \alpha < 1$ График функции $y=f(\alpha x)$ получается растяжением графика функции $y=f(x)$ вдоль оси x в $1/\alpha$ раз.

Примеры:

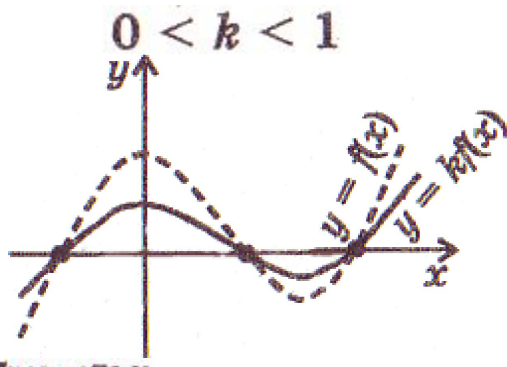


Замечание. Точки с пересечения графика с осью y остаются неизменными.

6) Сжатие и растяжение вдоль оси y $f(x) \rightarrow kf(x)$, где $k > 0$



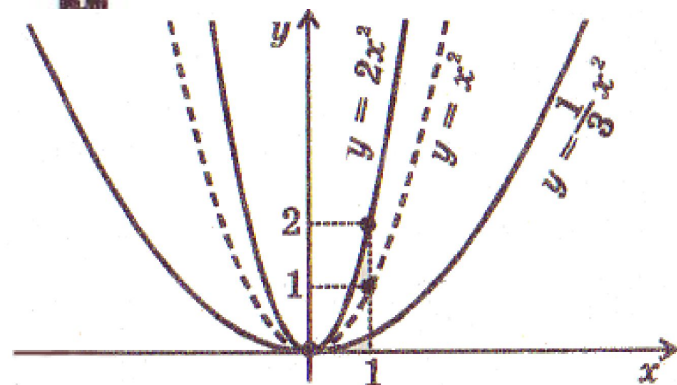
$k > 1$ График функции $y = kf(x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y в k раз.



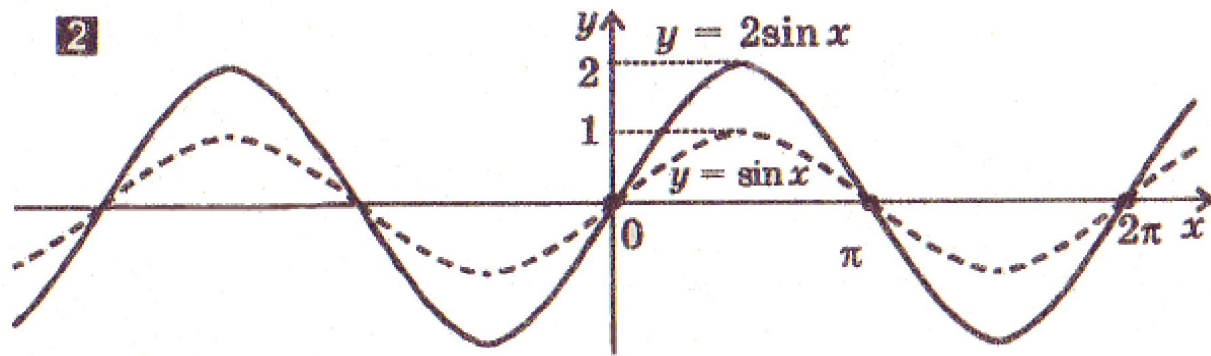
$0 < k < 1$ График функции $y = kf(x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y в $1/k$ раз.

Примеры:

1



2



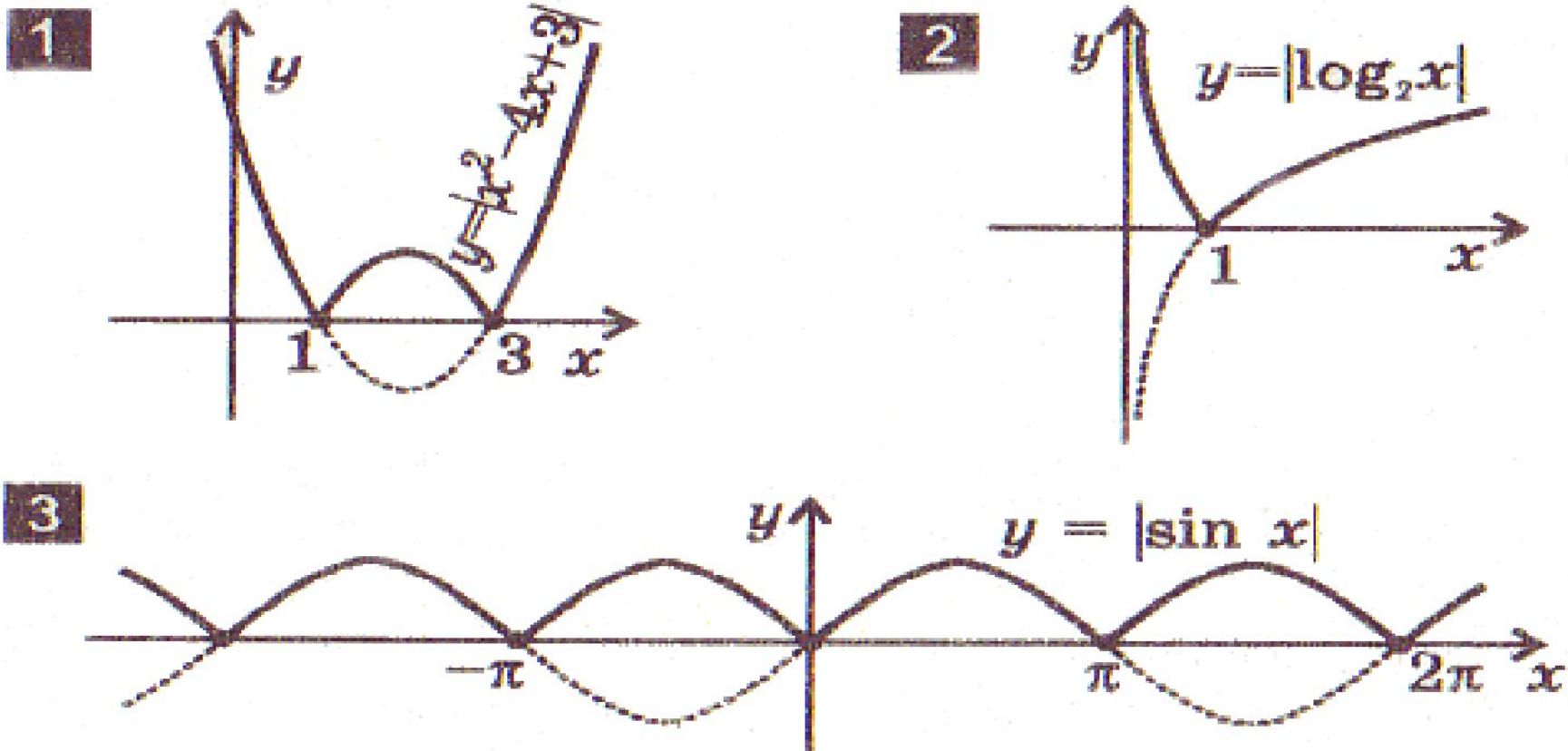
Замечание. Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.

7) Построение графика функции $y=|f(x)|$

Части графика функции $y=f(x)$, лежащие выше оси x и на оси x , остаются без изменения, а лежащие ниже оси x – симметрично отображаются относительно этой оси (вверх).

Замечание. Функция $y=|f(x)|$ неотрицательна (ее график расположен в верхней полуплоскости).

Примеры:

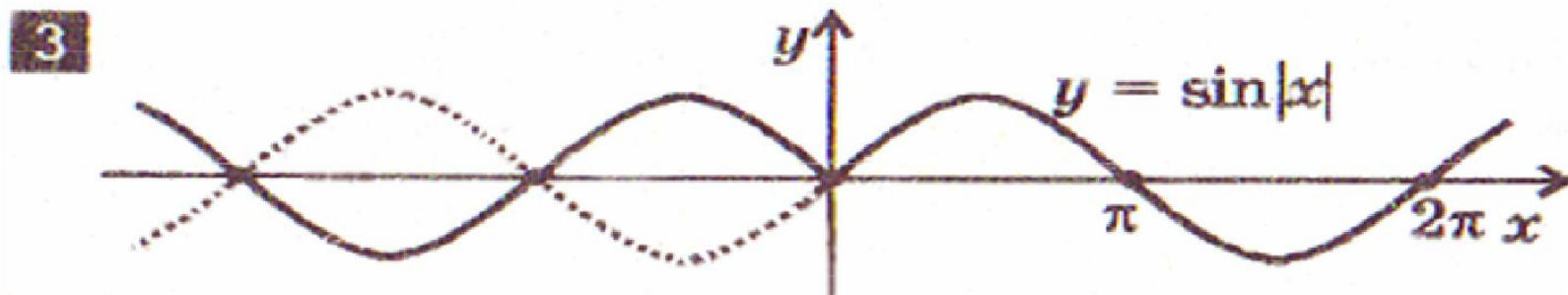
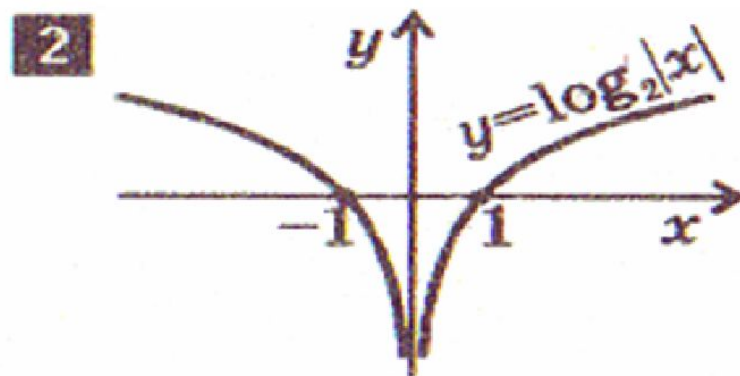
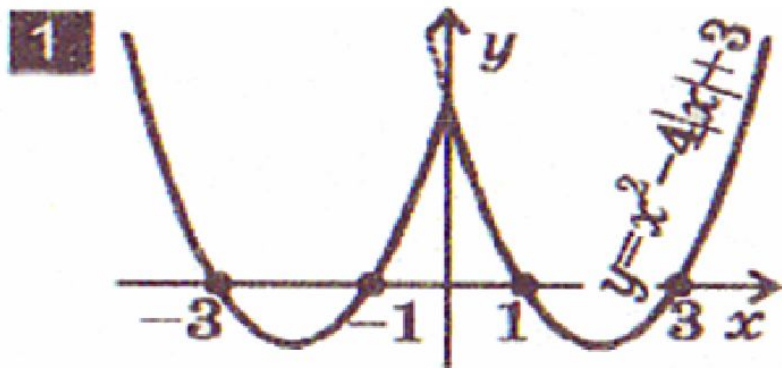


8) Построение графика функции $y=f(|x|)$

Часть графика функции $y=f(x)$, лежащая левее оси y , удаляется, а часть, лежащая правее оси y – остается без изменения и, кроме того, симметрично отражается относительно оси y (влево). Точка графика лежащая на оси y , остается неизменной.

Замечание. Функция $y=f(|x|)$ четная (ее график симметричен относительно оси y).

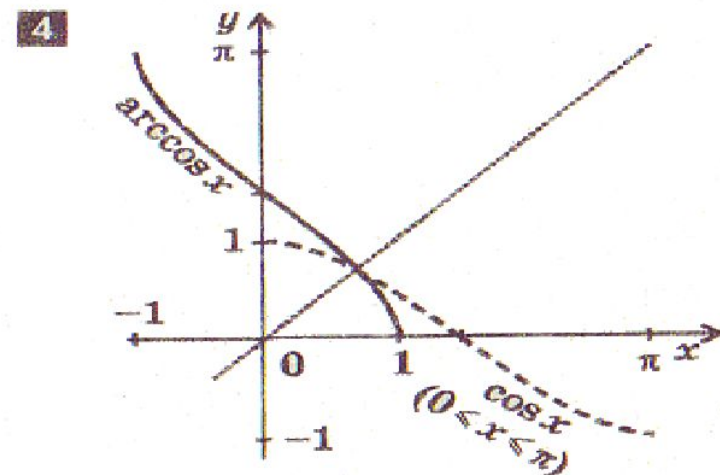
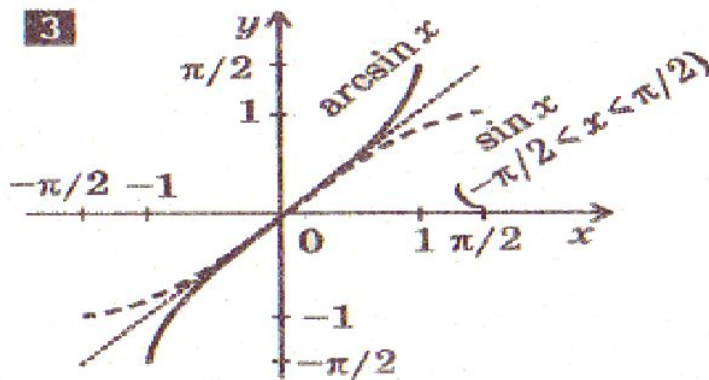
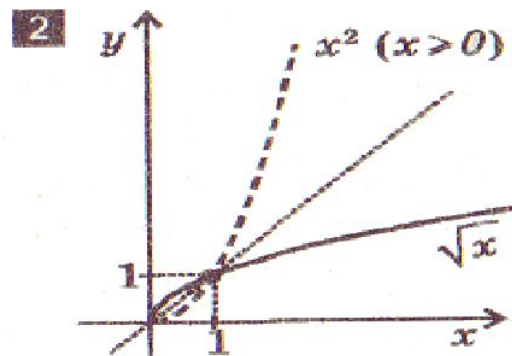
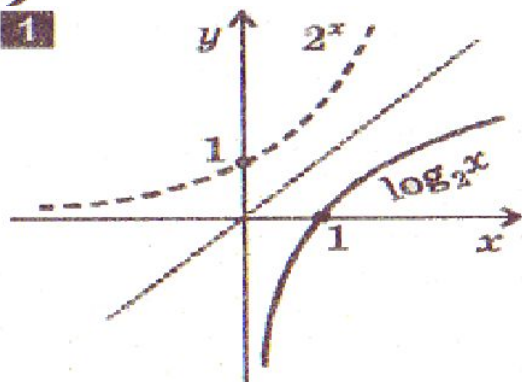
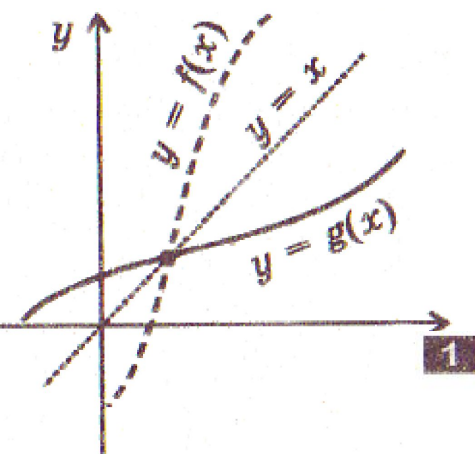
Примеры:



9) Построение графика обратной функции

График функции $y=g(x)$, обратной функции $y=f(x)$, можно получить преобразованием симметрии графика функции $y=f(x)$ относительно прямой $y=x$.

Замечание. Описанное построение производить только для функции, имеющей обратную.



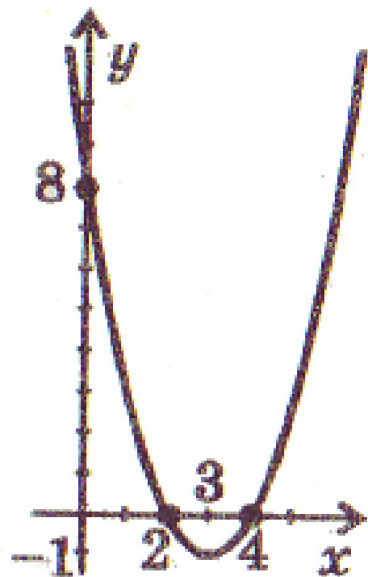


Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

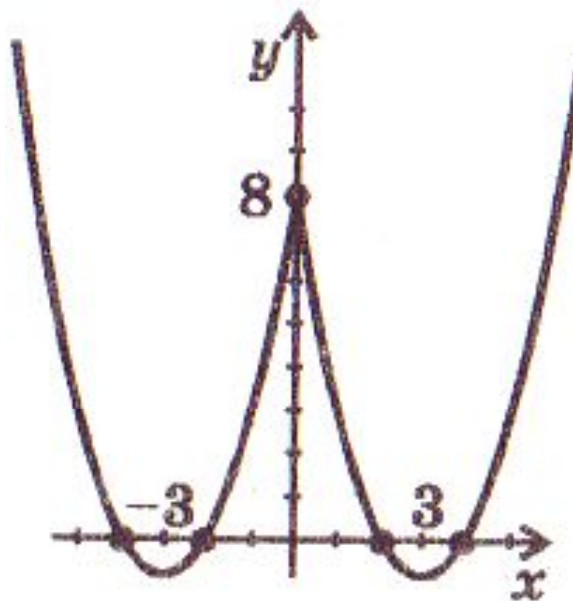
Построение графиков сложных функций с помощью
последовательных преобразований графиков
элементарных функций (на примерах)

$$y = |x^2 - 6|x| + 8| = ||x|^2 - 6|x| + 8| = (|x| - 3)^2 - 1$$

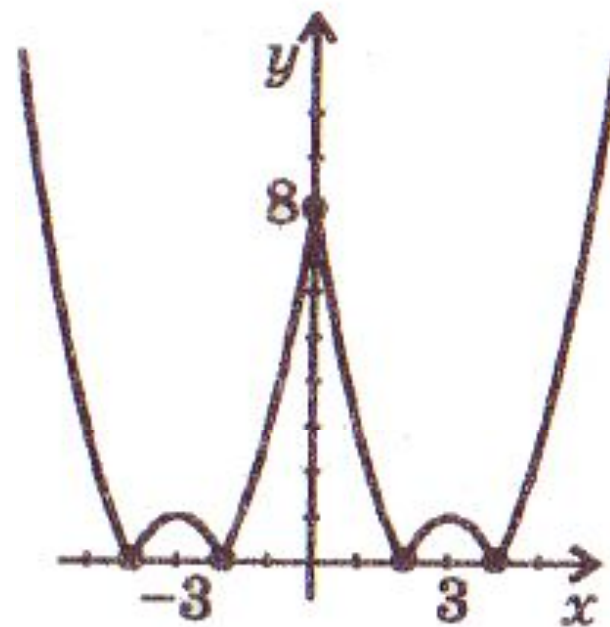
$$y = x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1$$



$$y = (|x| - 3)^2 - 1$$



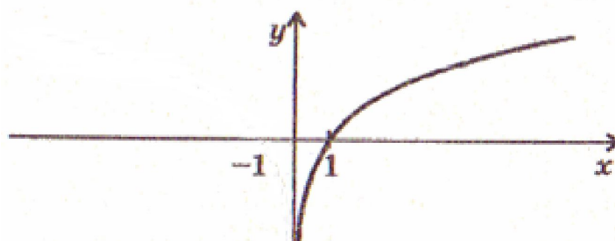
$$y = (|x| - 3)^2 - 1$$



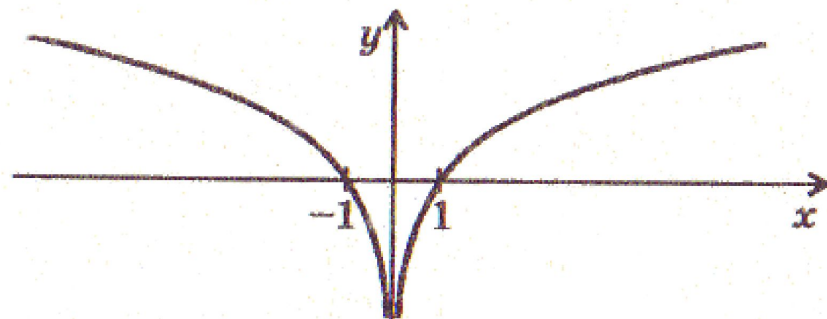
Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

$$y = |\log_2(|x - 1|)|$$

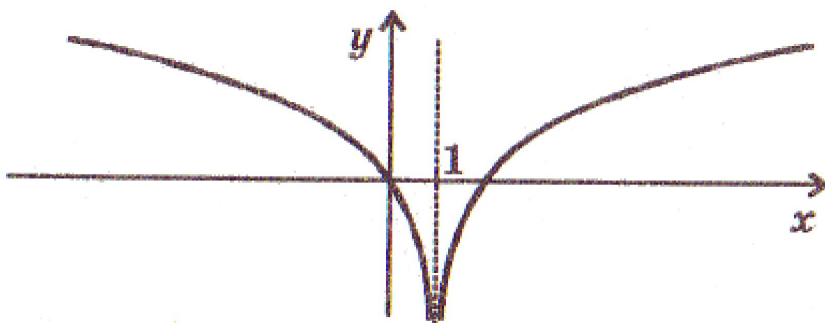
$$y = \log_2 x$$



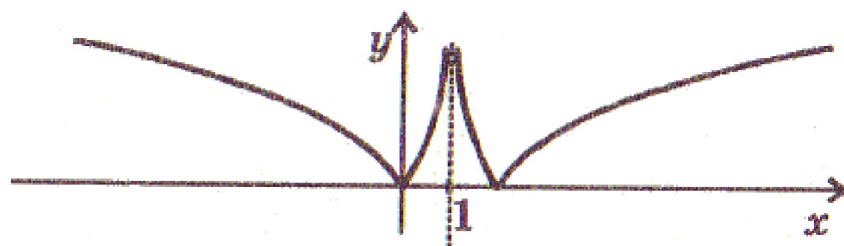
$$y = \log_2 |x|$$



$$y = \log_2(|x - 1|)$$

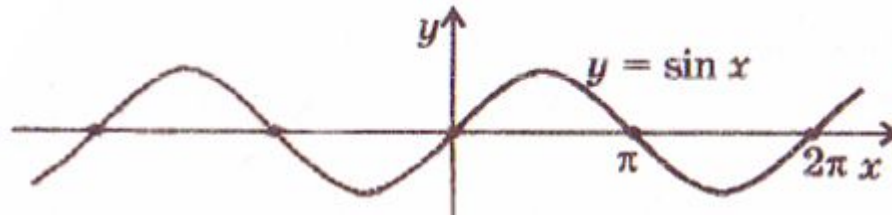


$$y = |\log_2(|x - 1|)|$$

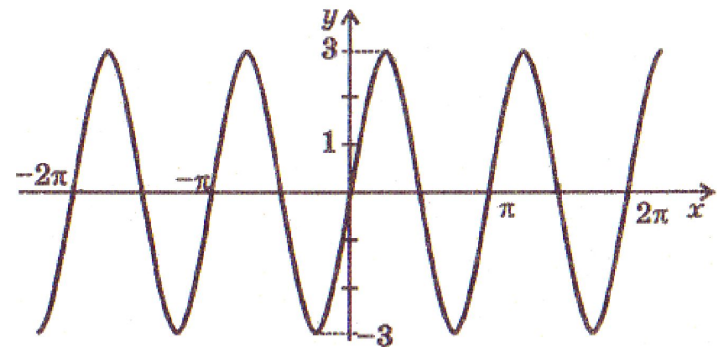


Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

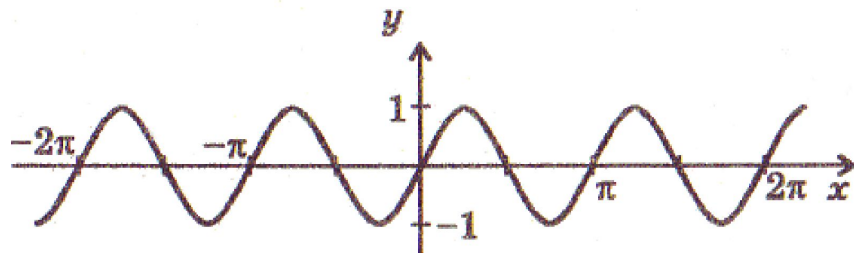
$$y = |3\sin 2x| - 1$$



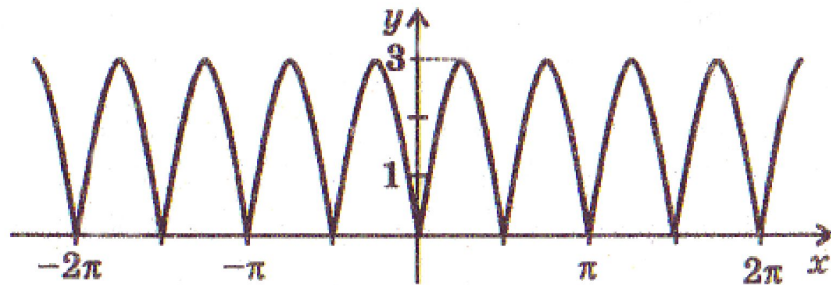
$$y = 3\sin 2x$$



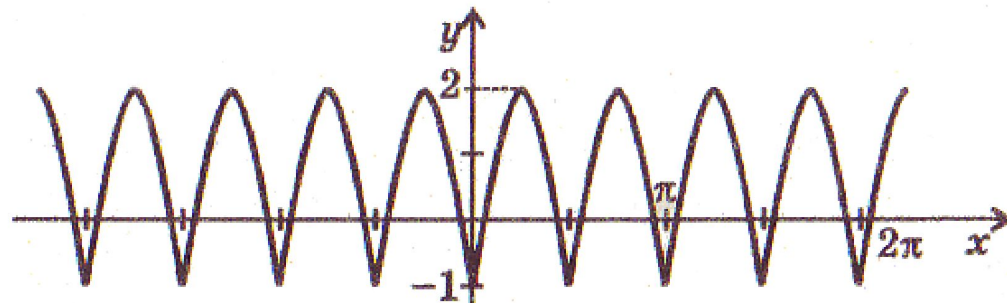
$$y = \sin 2x$$



$$y = |3\sin 2x|$$



$$y = |3\sin 2x| - 1$$





Применение правил преобразования графиков при решении заданий ЕГЭ (части С).

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5^{x-1} - y = 0 \\ |x-4| + 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5^{x-1} \\ y = |x-4| + 3 \end{cases}$$

В одной системе координат, построим графики функций: а)

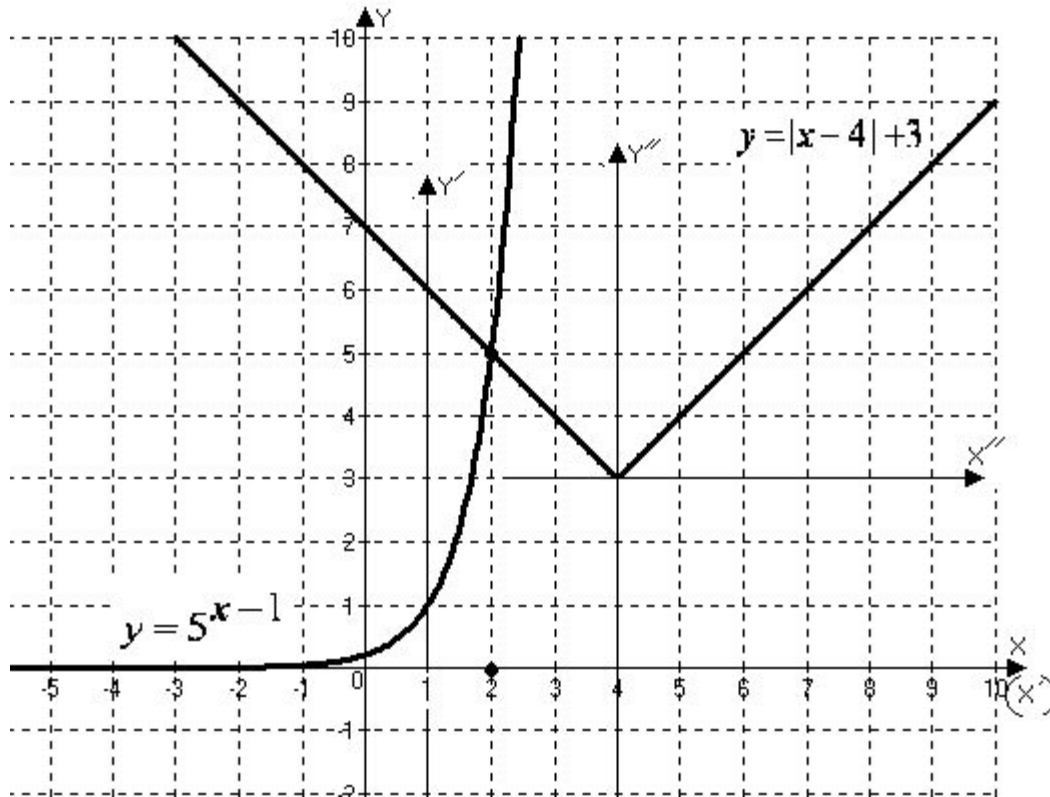
$$y = 5^{x-1}$$

График этой функции получается в результате построения графика $y = 5^x$

$$y = 5^x \begin{array}{c|c|c|c|c} X & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline Y & 0,2 & 1 & 5 & 25 \end{array}$$

в новой системе координат $x'o'y'$, где $O'(1;0)$

б) $y = |x-4| + 3$ В системе $x''o''y''$ где $O''(4;3)$ построим график $y = |x|$.



Решением системы являются координаты точки пересечения графиков

и

Пара чисел: $y = 5^{x-1}$, $y = |x-4| + 3$,
 $\begin{matrix} x & y \\ (2; 5) \end{matrix}$

Проверка:

$$\begin{cases} 5^{2-1} - 5 = 0 \\ |2-4| + 3 = 5 \end{cases}$$

Ответ: (2;5).

(верно)

(верно)

Решить уравнение: $f(g(x)) + g(f(x)) = 32$, если известно, что

$$f(x) = 0,5x^2 - 2x + 12$$

$$g(x) = \begin{cases} 20, & \text{при } x \geq 5 \\ 0,5 \cdot 2^x + \frac{8}{6-x} & \text{при } x < 5. \end{cases}$$

Решение: Преобразуем функцию $f(x)$. $f(x) = 0,5(x^2 - 4x + 4) + 10$

$$f(x) = 0,5(x-2)^2 + 10$$

Так как $0,5(x-2)^2 \geq 0$, то $f(x) \geq 10$

Тогда $g(f(x)) = 20$.

Подставим в уравнение $f(g(x)) + g(f(x)) = 32$, получим $f(g(x)) + 20 = 32$;

$$f(g(x)) = 12$$

Пусть $g(x) = t$, тогда $f(t) = 12$ или

$$0,5t^2 - 2t + 12 = 12 \quad 0,5t^2 - 2t = 0 \quad t^2 - 4t = 0 \quad t(t-4) = 0 \quad t = 0 \text{ или } t = 4$$

Имеем: $g(x) = 0$ или $g(x) = 4$

Так как при $x \geq 5$ $g(x) = 20$, то решения уравнений: $g(x) = 0$ и $g(x) = 4$ будем искать среди $x < 5$.

Тогда: а) Уравнение $g(x) = 0$ примет вид:

$$0,5 \cdot 2^x + \frac{8}{6-x} = 0 \quad | \cdot 2 \Rightarrow 2^x + \frac{16}{6-x} = 0$$

Так как $x < 5$, то $6-x > 0$

$$\frac{16}{6-x} > 0 \Rightarrow 2^x + \frac{16}{6-x} > 0$$

Вывод: уравнение $g(x) = 0$ не имеет корней.

б) уравнение $g(x) = 4$ примет вид:

$$0,5 \cdot 2^x + \frac{8}{6-x} = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} 2^x = 4 - \frac{8}{6-x} \Rightarrow 2^{x-1} = \frac{8}{x-6} + 4$$

В одной системе координат построим графики функций

$$y = 2^{x-1} \quad y = \frac{8}{x-6} + 4$$

а) $y = 2^{x-1}$

График данной функции получается построением графика $y = 2^x$

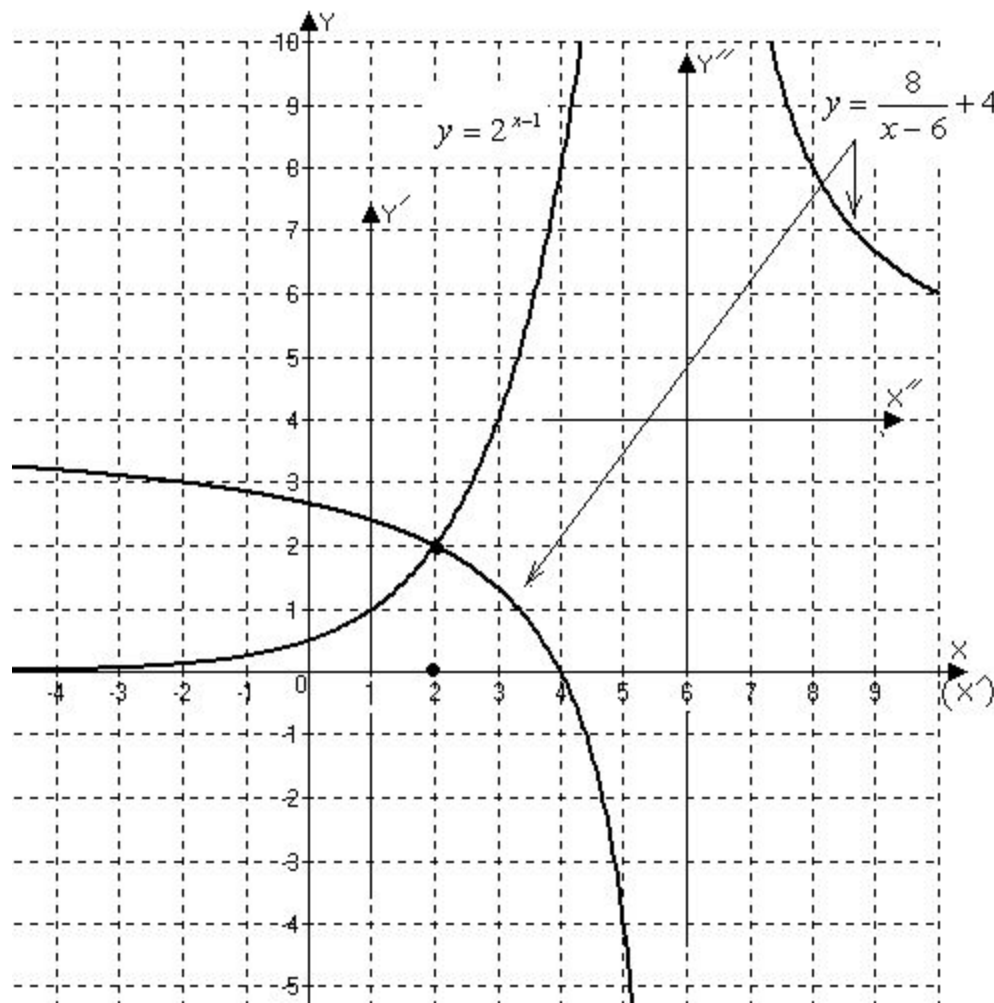
В системе $x'o'y'$, где $o'(1;0)$.

X	-1	0	1	2	3
Y	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

б) $y = \frac{8}{x-6} + 4$

В системе $x''o''y''$ где $o''(6;4)$ построим график функции

$$y = \frac{8}{x} \quad (x \neq 0)$$



X	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
Y	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1

Условию $x < 5$ удовлетворяет абсцисса общей точки графиков $x = 2$.
 Ответ: 2.

Вывод

:

Мы видим, что правила преобразования графиков существенно упрощают построение графиков сложных функций.

Помогают найти нетрадиционное решение сложных задач.



Тема :

**«Преобразование
графиков функции»**